Modellierung und Datenanalyse
Stefan Hergarten
Wintersemester 2017/18

Übungsklausur

Mat.-Nr.: ____________________

Datum: vor dem 06.02.
Dauer: 45 Minuten

Name: ________________________________

Aufgabe 1 (??? Punkte)

Normieren Sie den Vektor $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ in euklidischer Norm, Maximumsnorm und Manhattan-Norm.

Aufgabe 2 (??? Punkte)

Die Vektoren $\underline{a} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\underline{a} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{R}^2$ mit Standard-Skalarprodukt sind

linear unabhängig	◯ ja	◯ nein
orthogonal	◯ ja	◯ nein
normiert	◯ ja	◯ nein
orthonormal	◯ ja	◯ nein
eine Basis des $\mathbb{R}^2$	◯ ja	◯ nein

Falls die Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bilden, berechnen Sie die Matrix der linearen Abbildung

$$F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

bzgl. dieser Basis.

Aufgabe 3 **(??? Punkte)**

(a) Gilt die dritte binomische Formel

$$(\underline{a}+\underline{b})\cdot(\underline{a}-\underline{b}) \;=\; |\underline{a}|^2 - |\underline{b}|^2$$

für alle Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$ jedes euklidischen Vektorraums?

○ ja ○ nein

(b) Gilt die dritte binomische Formel

$$(A+B)\,(A-B) \;=\; A^2 - B^2$$

für alle $n \times n$-Matrizen A und B?

○ ja ○ nein

Aufgabe 4 **(??? Punkte)**

Welche der folgenden Abbildungen des $\mathbb{R}^3$ ist linear? Geben Sie zu jeder der Abbildungen, die Ihrer Meinung nach linear sind, ihre Matrix bzgl. der Standardbasis an.

(a) $$F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) \;=\; \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

○ linear ○ nicht linear

(b) $F(\underline{x}) \;=\; \underline{a} \times \underline{x}$, wobei $\times$ das Vektorprodukt bezeichnet, und $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ein gegebener (fester) Vektor ist.

○ linear ○ nicht linear

(c) $F(\underline{x}) \;=\; \underline{b} \times (\underline{a} \times \underline{x})$, wobei $\times$ das Vektorprodukt bezeichnet, und $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ gegebene (feste) Vektoren sind.

○ linear ○ nicht linear

Modellierung und Datenanalyse
Stefan Hergarten
Wintersemester 2017/18

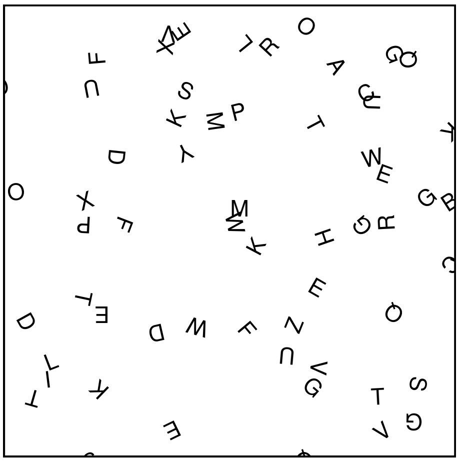
Aufgabe 5 (??? Punkte)

Wir betrachten die folgende lineare Abbildung des $\mathbb{R}^2$ (mit Euklidischer Norm):

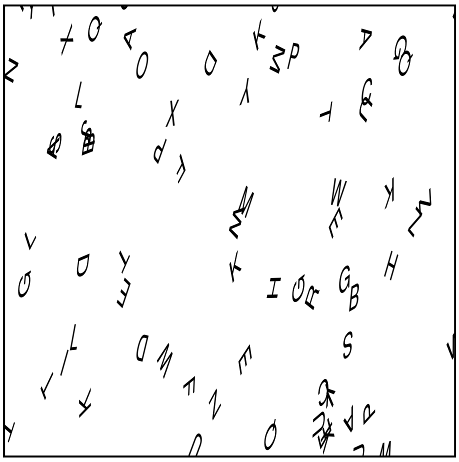
$$F(\underline{x}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

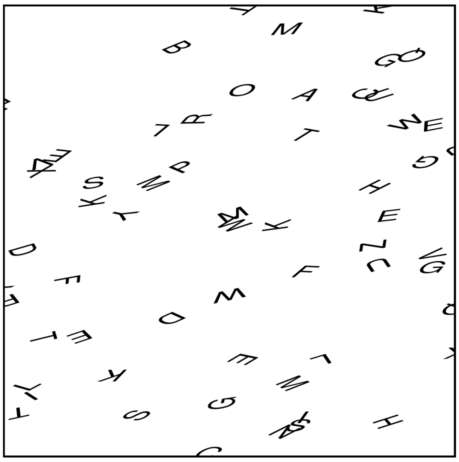
(a) Geben Sie die Matrix von F bzgl. der Standardbasis an.

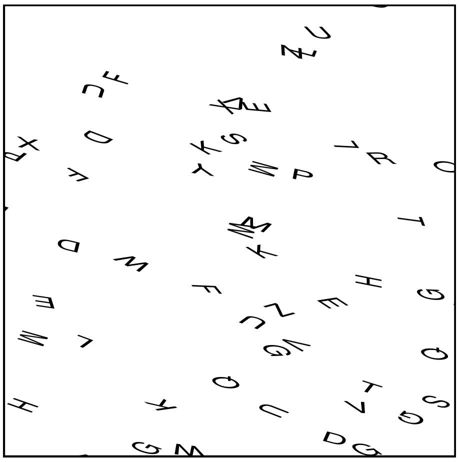
(b) Die Abbildung F wird auf die folgende Buchstabensuppe angewandt, wobei die x_1-Achse wie üblich nach rechts und die x_2-Achse nach oben zeigt.

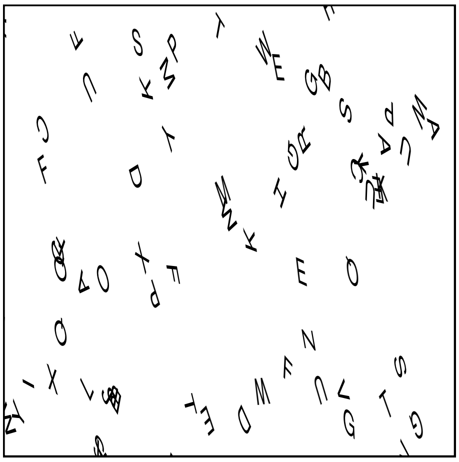


Falls eines der vier folgenden Bilder die von F deformierte Buchstabensuppe darstellt, markieren Sie dieses Bild.









(c) Geben Sie die Determinante von F an.

(d) Geben Sie die Spur von F an.

(e) Berechnen Sie die Eigenwerte von F.

(f) Geben Sie zu jedem in Teil (e) gefundenen Eigenwert einen normierten (!) Eigenvektor an.

(g) Handelt es sich bei F um eine Scherung?

◯ ja ◯ nein

(h) Handelt es sich bei F um eine einfache Scherung?

◯ ja ◯ nein