

Das Magnetfeld der Erde

Stefan Hergarten

Institut für Geo- und Umweltnaturwissenschaften
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg



Die Maxwell-Gleichungen

Beschreiben die Entstehung elektrischer und magnetischer Felder und deren Wechselwirkung.

- Elektrische Ladungen sind Quellen des elektrischen Feldes.
- Das Magnetfeld ist ein Wirbelfeld ohne Quellen (geschlossene Feldlinien), d. h. es gibt keine „magnetischen Ladungen“.
- Zeitliche Änderungen im Magnetfeld erzeugen ein elektrisches Wirbelfeld.
- Elektrische Ströme (bewegte Ladungen) und zeitliche Änderungen im elektrischen Feld erzeugen ein magnetisches Wirbelfeld.

Die magnetische Flussdichte

Die magnetische Flussdichte \vec{B} beschreibt die Wirkung des Magnetfeldes auf bewegte Ladungen über die Lorentzkraft

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

mit

$$q = \text{Ladung [C]}$$

$$\vec{v} = \text{Geschwindigkeit } \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$$

Für einen stromdurchflossenen Leiter:

$$\vec{F} = I \vec{s} \times \vec{B}$$

mit

$$I = \text{Stromstärke [A]}$$

$$\vec{s} = \text{Vektor von Anfang zum Ende des Leiters [m]}$$

Die magnetische Flussdichte

Einheiten:

SI-System: $1 \text{ T (Tesla)} = 1 \frac{\text{N}}{\text{Am}} = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$

Gauß-CGS-System: $1 \text{ Gs (G, } \Gamma, \text{ Gau\ss)} = 1 \frac{\sqrt{\text{g cm}}}{\text{s}} = 10^{-4} \text{ T}$

Geophysik (veraltet): $1 \gamma = 1 \text{ nT} = 10^{-9} \text{ T}$

Erdmagnetfeld an der Erdoberfläche: $|\vec{B}| \approx 30\text{--}60 \mu\text{T}$

Andere Bezeichnungen: magnetische Induktion, magnetische Feldstärke, magnetisches Feld

Die magnetische Feldstärke

Die magnetische Feldstärke \vec{H} beschreibt die Erzeugung von Magnetfeldern durch elektrische Ströme:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \nabla \times \vec{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_3}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial H_1}{\partial x_3} - \frac{\partial H_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial H_2}{\partial x_1} - \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \vec{j} + \dots$$

mit \vec{j} = Stromdichte.

Für einen unendlich langen geraden Leiter:

$$|\vec{H}| = \frac{I}{2\pi r}$$

mit r = Abstand vom Leiter.

Die magnetische Feldstärke

Vorsicht: Beide Gleichungen gelten nur im SI-System. Zusätzlicher Faktor $\frac{4\pi}{c}$ mit $c =$ Lichtgeschwindigkeit im Gauß-CGS-System.

Andere Bezeichnung: magnetische Erregung

Zusammenhang zur Flussdichte:

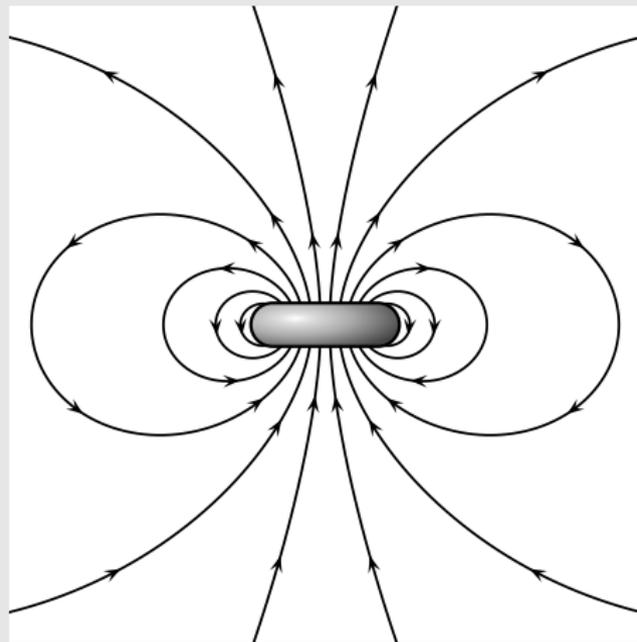
$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

im Vakuum mit der magnetischen Feldkonstante
(Vakuumpermeabilität)

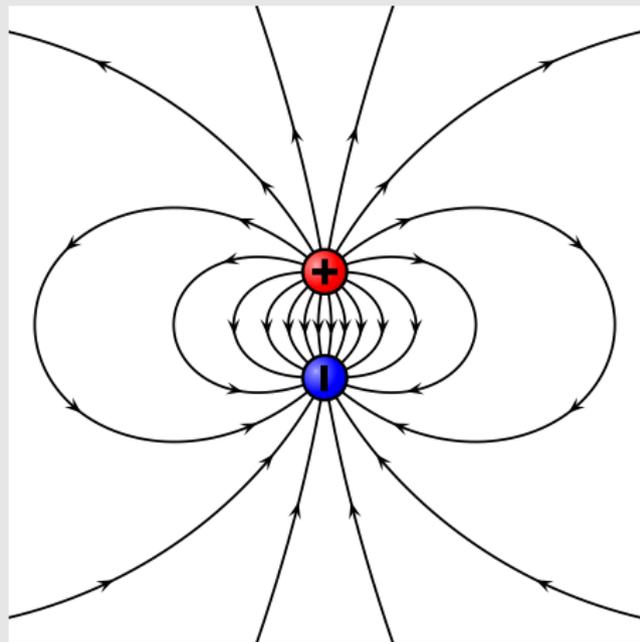
$$\mu_0 = \begin{cases} 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} & (\text{SI}) \\ 1 & (\text{Gauß-CGS}) \end{cases}$$

Magnetische Dipole

Magnetfeld einer Leiterschleife



Elektrisches Feld zweier Ladungen



Quelle: Wikipedia

Magnetische Dipole

Zentrum der Leiterschleife bei $\vec{0}$ und $|\vec{x}| \gg$ Radius der Schleife



$$\vec{H}(\vec{x}) \approx \frac{1}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \hat{x})\hat{x} - \vec{m}}{|\vec{x}|^3}, \quad \vec{B}(\vec{x}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \hat{x})\hat{x} - \vec{m}}{|\vec{x}|^3}$$

mit

\vec{m} = Dipolmoment

$\hat{x} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$ = Einheitsvektor in Richtung von \vec{x}

$(\vec{m} \cdot \hat{x})\hat{x}$ = Komponente von \vec{m} in Richtung von \vec{x}

Eigenschaften des magnetischen Dipolfelds

- Abfall mit dem Abstand:

$$|\vec{B}(\vec{x})| \sim \frac{1}{|\vec{x}|^3}$$

- Magnetfeld auf der Dipolachse ist parallel zur Dipolachse ($\vec{m} \parallel \vec{x}$), und

$$|\vec{B}(\vec{x})| = 2 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{|\vec{m}|}{|\vec{x}|^3}$$

- Magnetfeld auf dem magnetischen Äquator ($\vec{m} \perp \vec{x}$) ist umgekehrt parallel zur Dipolachse, und

$$|\vec{B}(\vec{x})| = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{|\vec{m}|}{|\vec{x}|^3}$$

Das magnetische Dipolmoment

Dipolmoment einer ebenen Leiterschleife:

$$m = IA$$

mit $A =$ vom Strom I umflossene Fläche

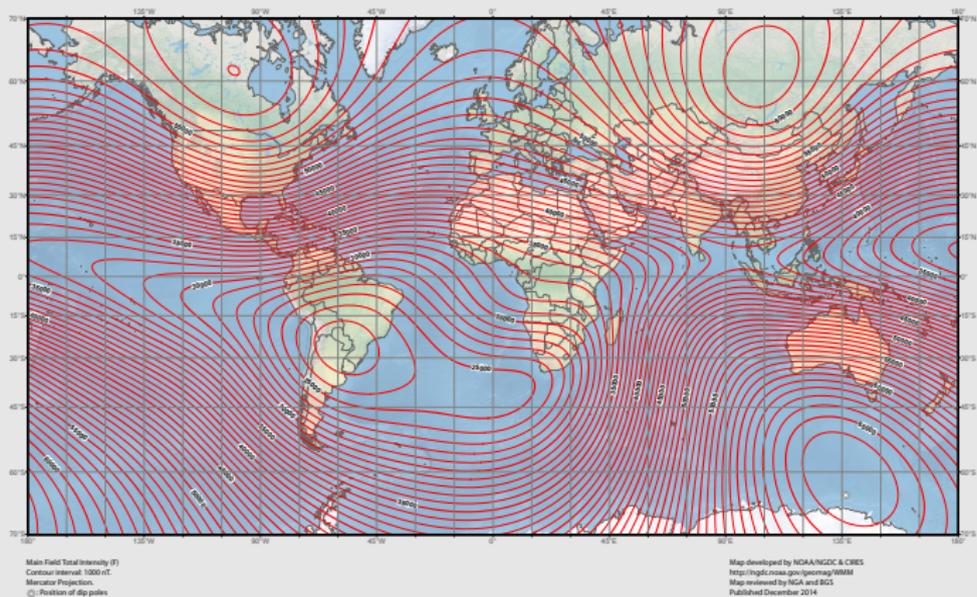
Dipolmoment einer beliebigen Verteilung der Stromdichte $\vec{j}(\vec{x})$:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int \vec{x} \times \vec{j}(\vec{x}) d^3x$$

Jedes Magnetfeld einer endlichen Stromverteilung wird näherungsweise zum Dipolfeld, wenn $|\vec{x}| \gg$ Ausdehnung der der Stromverteilung.

Totalintensität ($|\vec{B}|$)

US/UK World Magnetic Model - Epoch 2015.0
Main Field Total Intensity (F)



Quelle: National Geophysical Data Center at NOAA

Eigenschaften des Erdmagnetfelds

- Totalintensität $|\vec{B}|$ variiert derzeit über die Erdoberfläche zwischen etwa $22 \mu\text{T}$ und $67 \mu\text{T}$.
- Außerhalb der Erde hauptsächlich Dipolfeld.
- Dipolanteil an der Erdoberfläche beträgt etwa 90 %, im Erdinneren weniger.
- Entsteht hauptsächlich durch elektrische Ströme im Erdinneren.
- Ionosphäre and Magnetosphäre tragen etwa 2 % bei.
- Magnetische Stoffe in der Oberkruste (bis ca. 20 km Tiefe) tragen insgesamt etwa 2 % bei, aber mit stark inhomogener räumlicher Verteilung.
- Dipolmoment $|\vec{m}| \approx 7.72 \times 10^{22} \text{ Am}^2$ (2015); entspräche einem Strom von $I = 2 \times 10^9 \text{ A}$ um den äußeren Erdkern herum.
- Signifikante zeitliche Variationen auf allen Zeitskalen.

Das magnetische Potential

Obwohl Magnetfelder Wirbelfelder sind, lässt sich der Teil der Erdmagnetfeldes, der aus dem Erdinneren kommt, außerhalb der Erde als Gradient eines skalaren Potentials darstellen:

$$\vec{B}(\vec{x}) = -\nabla V(\vec{x})$$

Das Potential lässt sich (wie das Gravitationspotential) durch Kugelflächenfunktionen ausdrücken:

$$V(r, \phi, \lambda) = r_0 \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{l+1} \sum_{m=0}^l (g_{lm} Y_{lm}(\phi, \lambda) + h_{lm} Y_{l,-m}(\phi, \lambda))$$

$$(h_{l0} = 0)$$

Das magnetische Potential

- Die Kugelflächenfunktionen $Y_{lm}(\phi, \lambda)$ sind anders normiert als beim Gravitationspotential.
- Üblicherweise $r_0 = 6371.2$ km.
- Terme mit $l = 0$ kommen nicht vor ($g_{0m} = 0$).
- Terme mit $l = 1$ beschreiben den Dipolanteil

$$V \sim \frac{1}{r^2} \quad \rightarrow \quad |\vec{B}| \sim \frac{1}{r^3}$$

mit dem Dipolmoment

$$\vec{m} = \frac{4\pi r_0^3}{\mu_0} \begin{pmatrix} g_{11} \\ h_{11} \\ g_{10} \end{pmatrix}$$

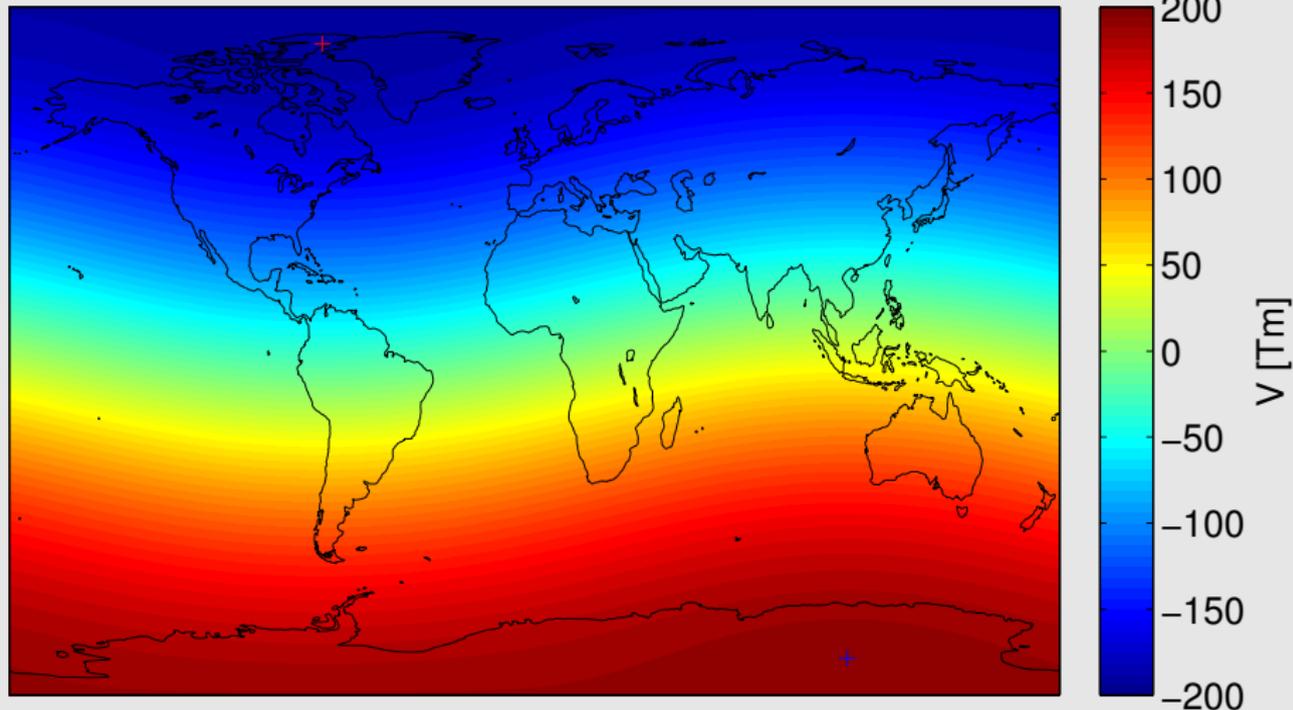
Referenzdaten für das Erdmagnetfeld

Zwei weit verbreitete Modelle:

- International Geomagnetic Reference Field (IGRF) mit Koeffizienten g_{lm} und h_{lm} für $l \leq 13$
- World Magnetic Model (WMM) mit Koeffizienten g_{lm} und h_{lm} für $l \leq 12$

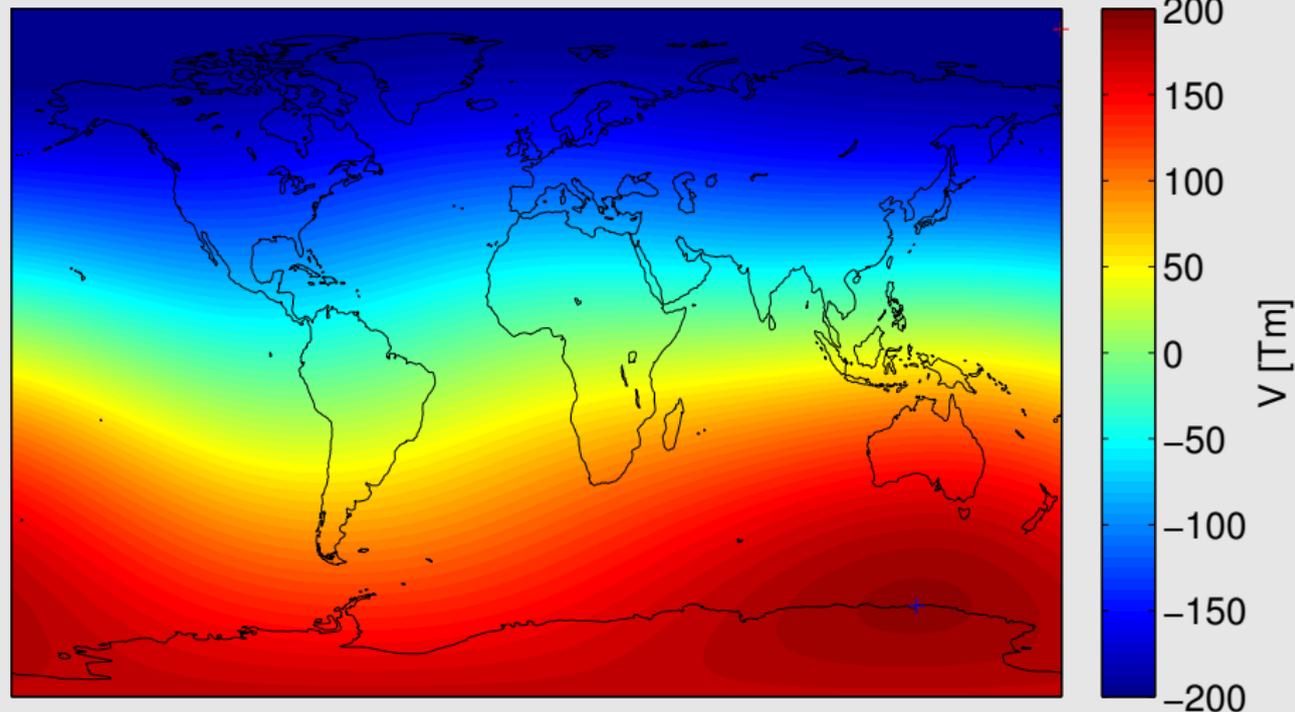
Das magnetische Potential an der Erdoberfläche

Nur Dipolanteil ($l = 1$, IGRF, 2015)



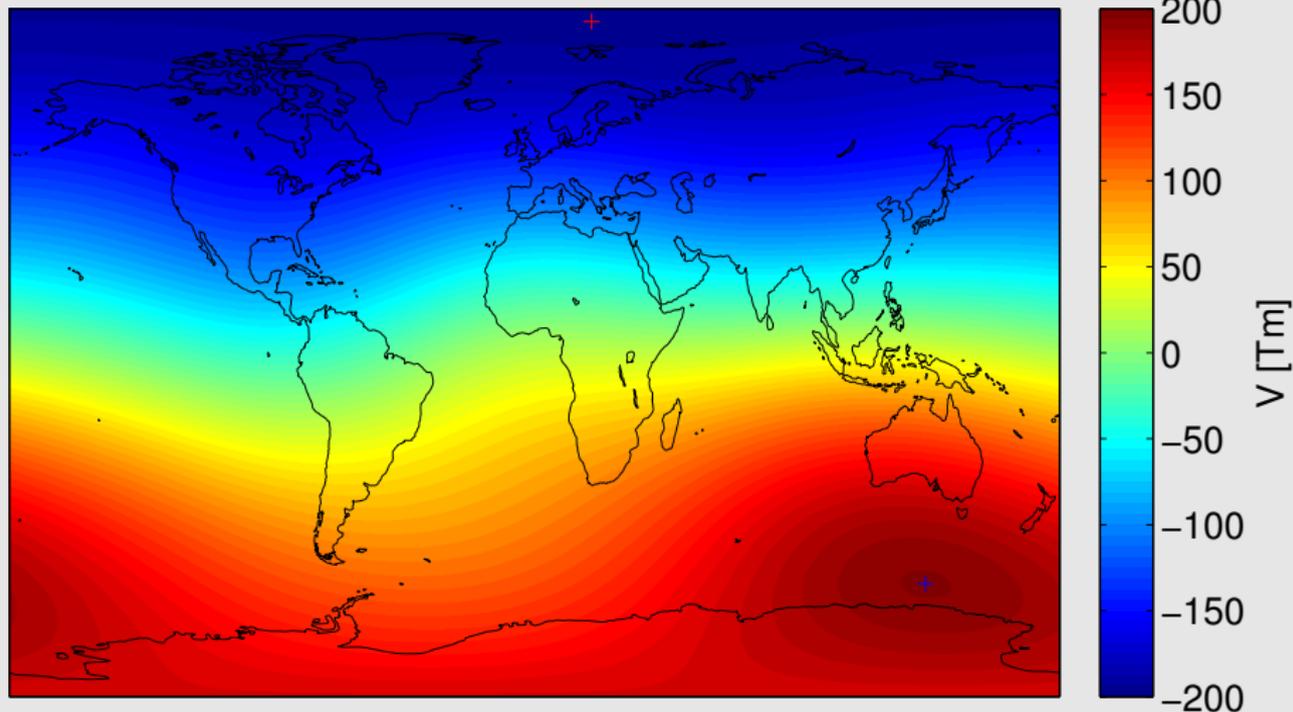
Das magnetische Potential an der Erdoberfläche

Anteile mit $l \leq 2$ (IGRF, 2015)



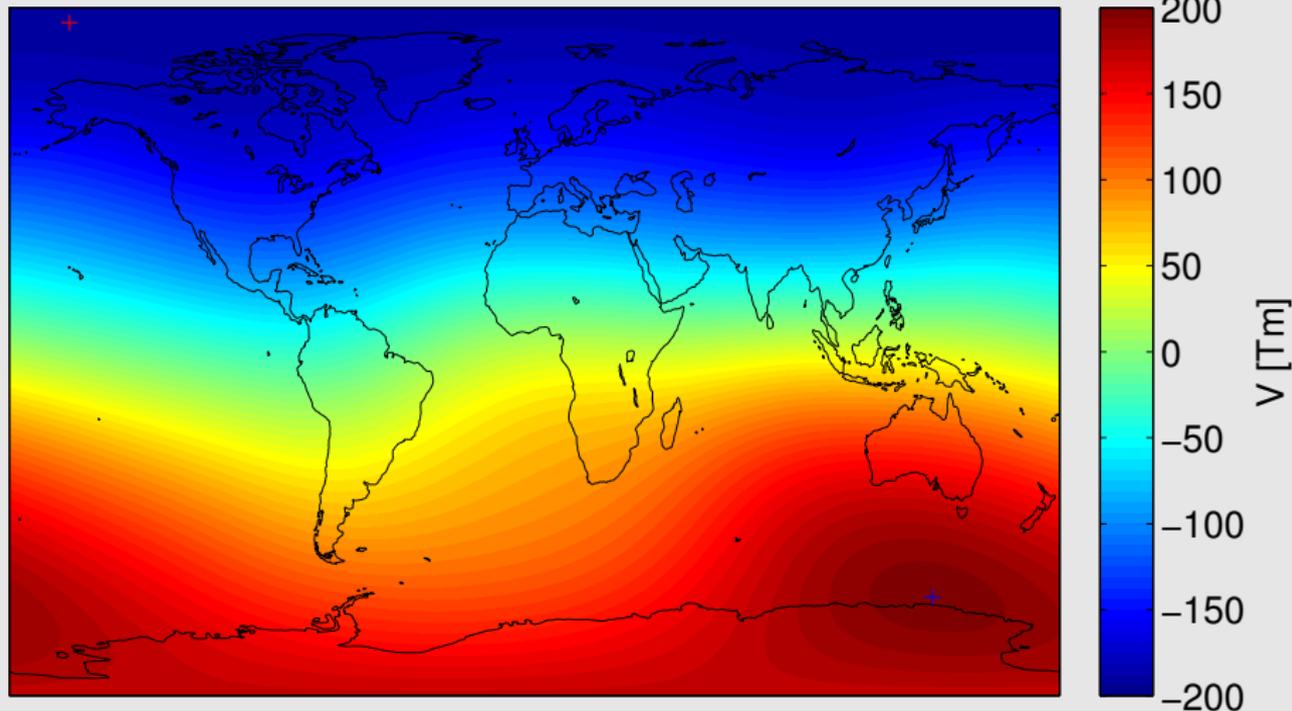
Das magnetische Potential an der Erdoberfläche

Anteile mit $l \leq 3$ (IGRF, 2015)

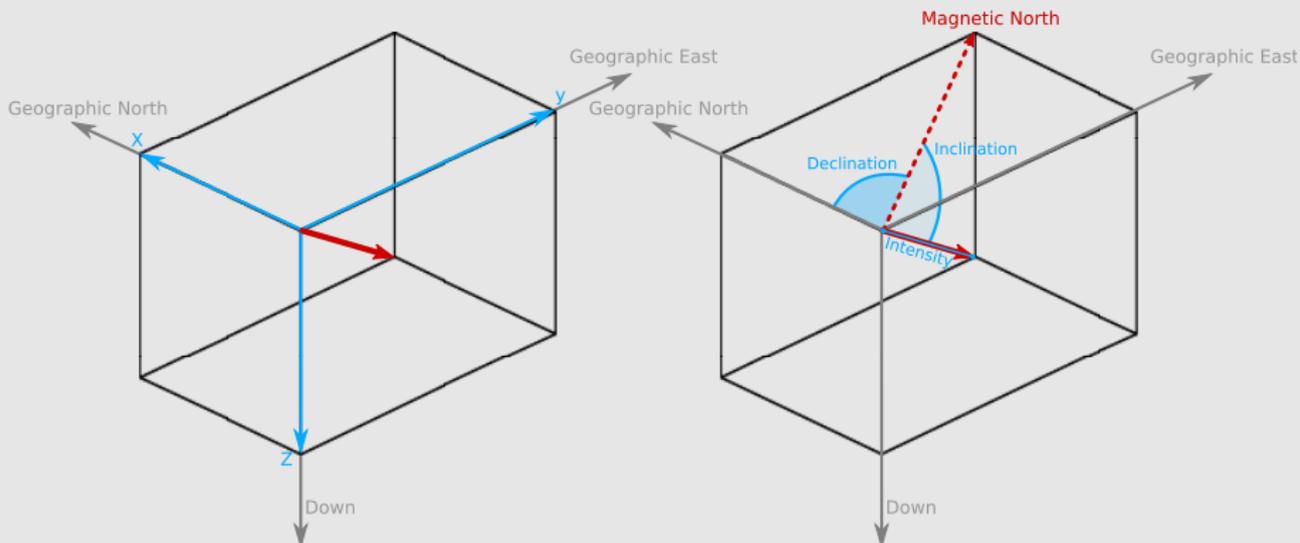


Das magnetische Potential an der Erdoberfläche

Anteile mit $I \leq 13$ (IGRF, 2015)



Komponenten des Erdmagnetfelds



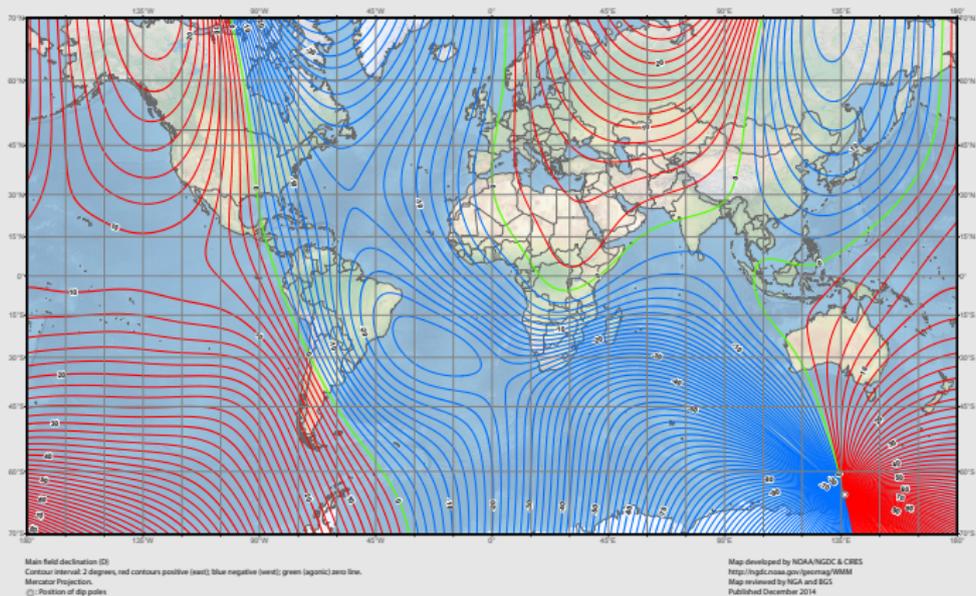
Quelle: Wikipedia

Deklination: Winkel zwischen magnetischer und geographischer Nordrichtung, im Uhrzeigersinn gemessen

Inklination: Einfallswinkel der Feldlinien gegenüber der Erdoberfläche

Deklination

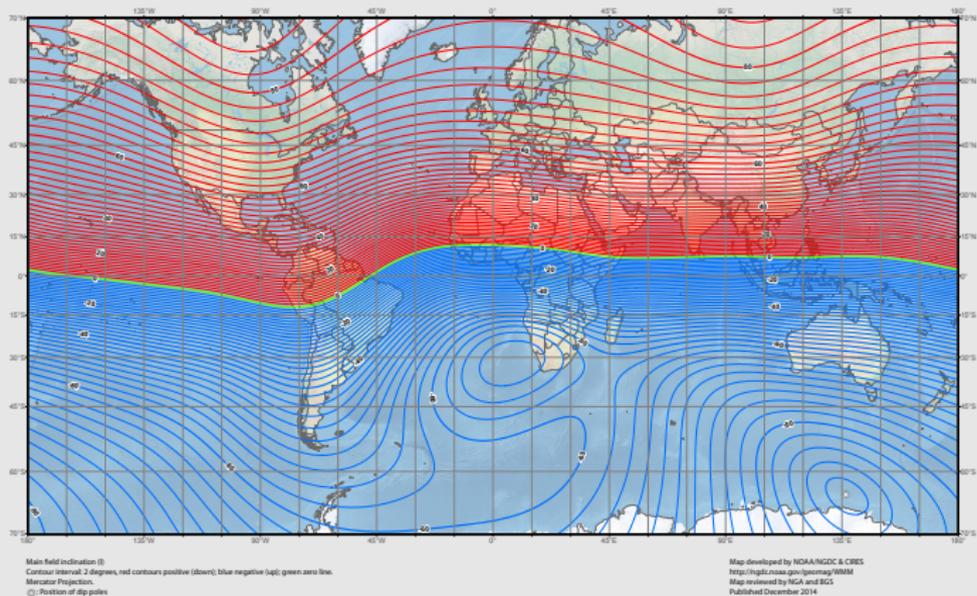
US/UK World Magnetic Model - Epoch 2015.0
Main Field Declination (D)



Quelle: National Geophysical Data Center at NOAA

Inklination

US/UK World Magnetic Model - Epoch 2015.0
Main Field Inclination (I)



Quelle: National Geophysical Data Center at NOAA

Grundsätzliche Definition

Pole = Punkte auf der Erdoberfläche (Referenzellipsoid), wo \vec{B} senkrecht auf der Erdoberfläche steht



Pole = lokale Minima und Maxima des Potentials V auf der Erdoberfläche

Achsenpole

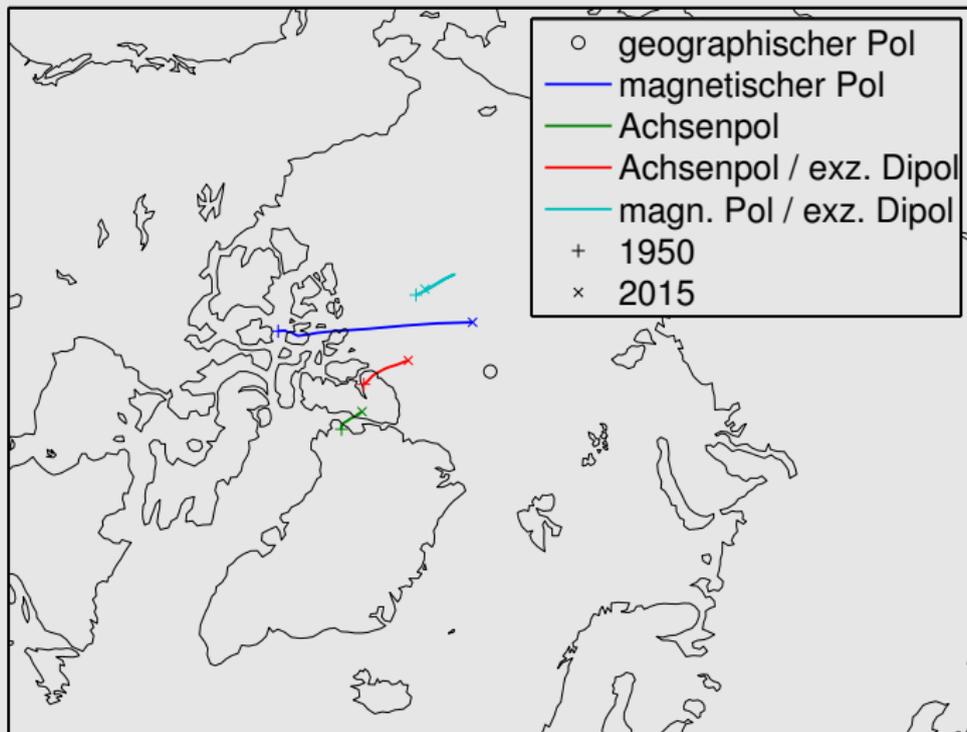
Für einen Dipol im Zentrum einer Kugel:

Pole = Punkte, wo die Dipolachse die Kugeloberfläche schneidet

Allgemein:

Achsenpole = Punkte, wo die Dipolachse die Erdoberfläche schneidet

Bewegung des Nordpols 1950–2015



Der exzentrische Dipol

Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen erfolgt mit dem Erdmittelpunkt als Koordinatenursprung.



Terme mit $l = 1$ beschreiben einen Dipol im Koordinatenursprung.

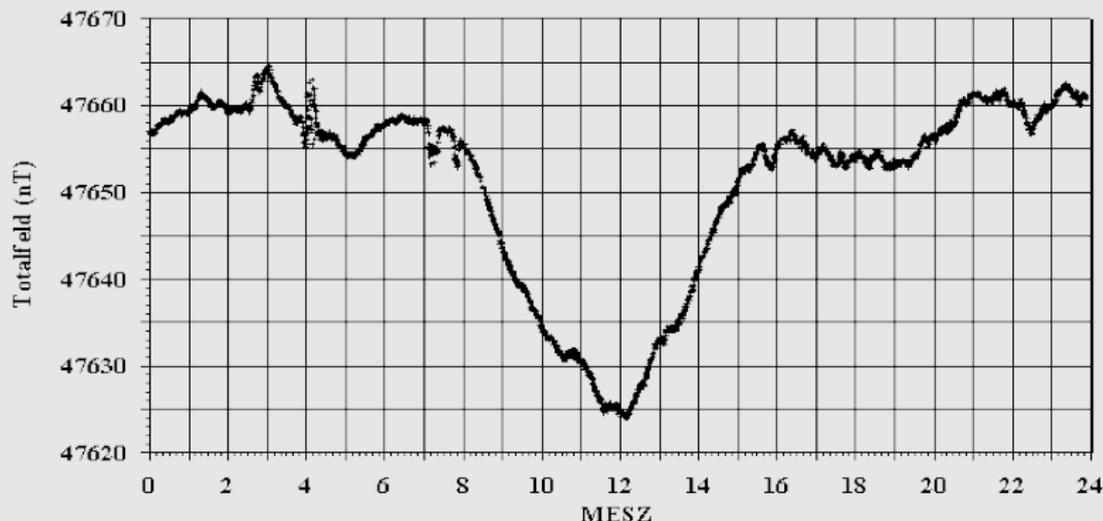


Nicht unbedingt die beste Approximation des Erdmagnetfeldes durch ein Dipolfeld.

- Grundsätzlich ist die Anpassung eines Dipols an beliebiger Stelle mit beliebigem Dipolmoment \vec{m} (Betrag und Orientierung der Achse) möglich.
- Üblicherweise wird ein Dipol mit demselben \vec{m} wie der ursprüngliche Dipol an den Teil der Magnetfeldes mit $l \leq 2$ angepasst.

Kurzzeitige Variationen

- Entstehen durch kosmische Strahlung.
- Tagesgang von einigen 10er nT.



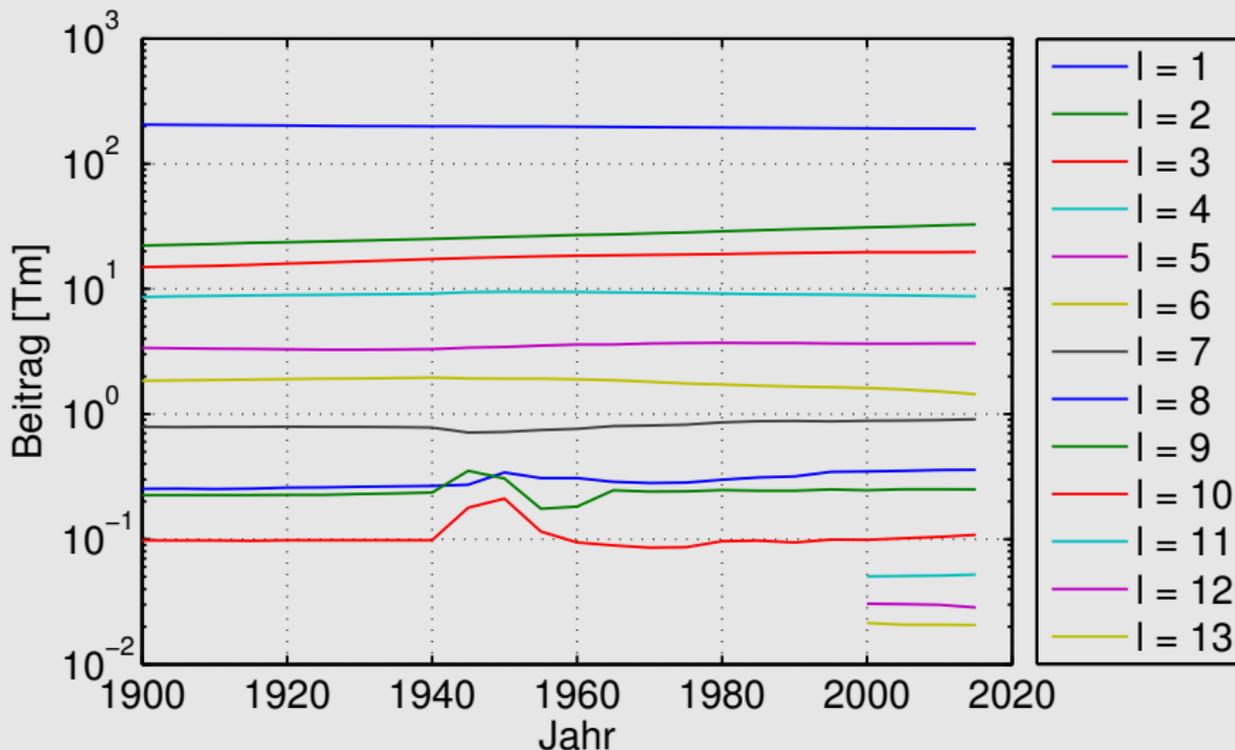
Quelle: Lehrveranstaltungsunterlagen R. Scholger, Montanuniversität Leoben

- Magnetische Stürme auch deutlich über 100 nT.

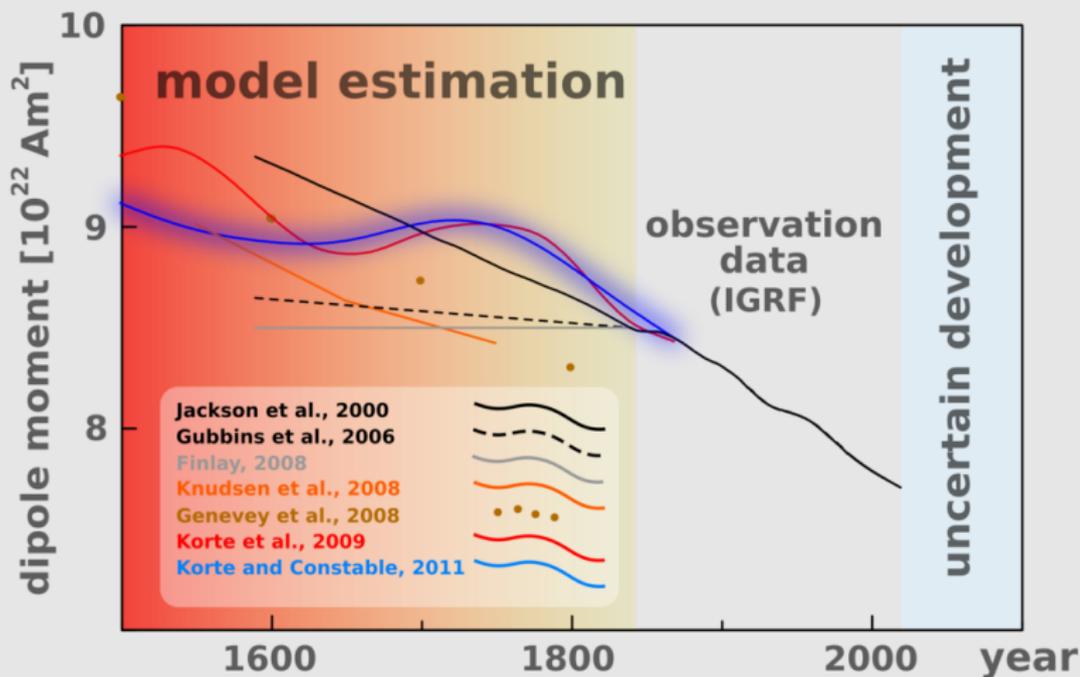
Säkularvariation

- Hängt mit der Entstehung des Magnetfelds im äußeren Erdkern zusammen.
- Wanderung der Pole und Schwankung der Intensität um bis zu ca. $10 \mu\text{T}$.
- Dipolachse ändert sich weniger stark als die Intensität der einzelnen Beiträge.

Variation der Beiträge der verschiedenen Grade zum Potential



Abfall des Dipolmoments



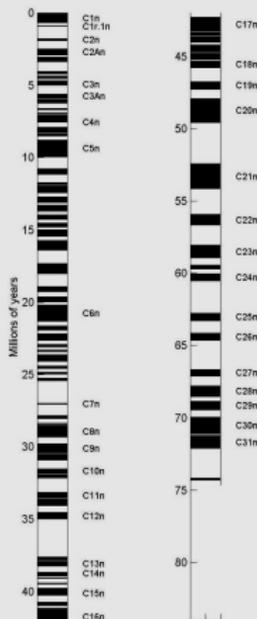
Quelle: Helmholtz-Zentrum Potsdam (GFZ)

Feldumkehr der Erdmagnetfelds

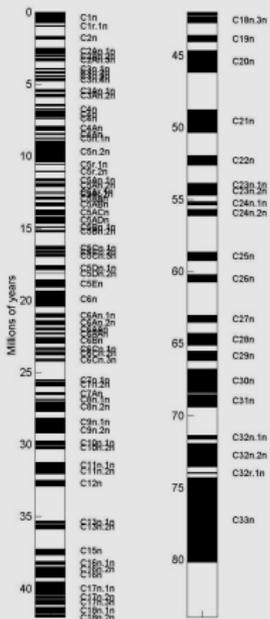
- Polarität wechselt in unregelmäßigen Abständen.
- Mindestens 281 Feldumkehrungen während der letzten 180 Ma.
- Zeitabstände zwischen Umkehrungen von ca. 20 000 a (vermutlich auch kürzer) bis 40 Ma während der letzten 180 Ma.
- Dipolanteil der Magnetfeldes geht während der Feldumkehr stark zurück.
- Totalintensität reduziert sich vermutlich während der Feldumkehr auf etwa 10 % der üblichen Intensität.
- Feld besitzt vermutlich mehr als 2 Pole während der Feldumkehr.
- Derzeitiger Abfall des Dipolmoments deutet auf evtl. bevorstehende Feldumkehr hin.
- Keine Auswirkungen früherer Umkehrereignisse auf das Leben auf der Erde bekannt.

Feldumkehr der Erdmagnetfelds

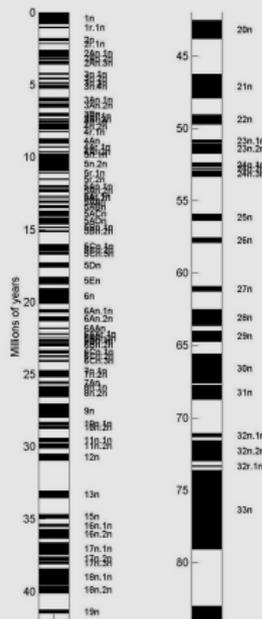
Heitzler et al., 1968



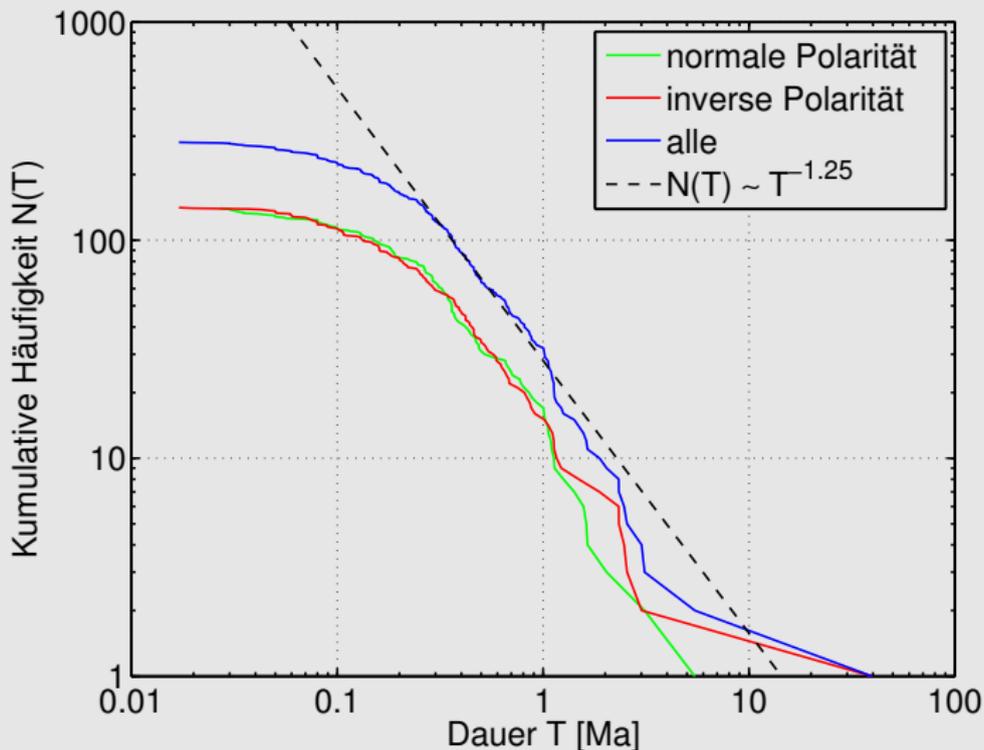
Kent and Gradstein, 1986



Cande & Kent 1995



Dauer der Phasen konstanter Polarität in den letzten 180 Ma



Dauer der Phasen konstanter Polarität

- Kumulative Häufigkeit $N(T)$ folgt (zumindest für $T \gtrsim 0.4$ Ma) einem Potenzgesetz

$$N(T) \sim T^{-D} \quad \text{mit} \quad D \approx 1.25$$

- Komplette zufällige Feldumkehr



$$N(T) \sim e^{-\lambda t}$$

- Für Potenzgesetz: Wahrscheinlichkeit, dass Phase konstanter Polarität mindestens für die Dauer T anhält:

$$P(T) \sim T^{-D}$$

Dauer der Phasen konstanter Polarität



Wahrscheinlichkeit, dass die Polarität nochmal mindestens für die Zeit t anhält:

$$P(T + t|T) = \frac{P(T + t)}{P(t)} = \frac{(T + t)^{-D}}{T^{-D}}$$

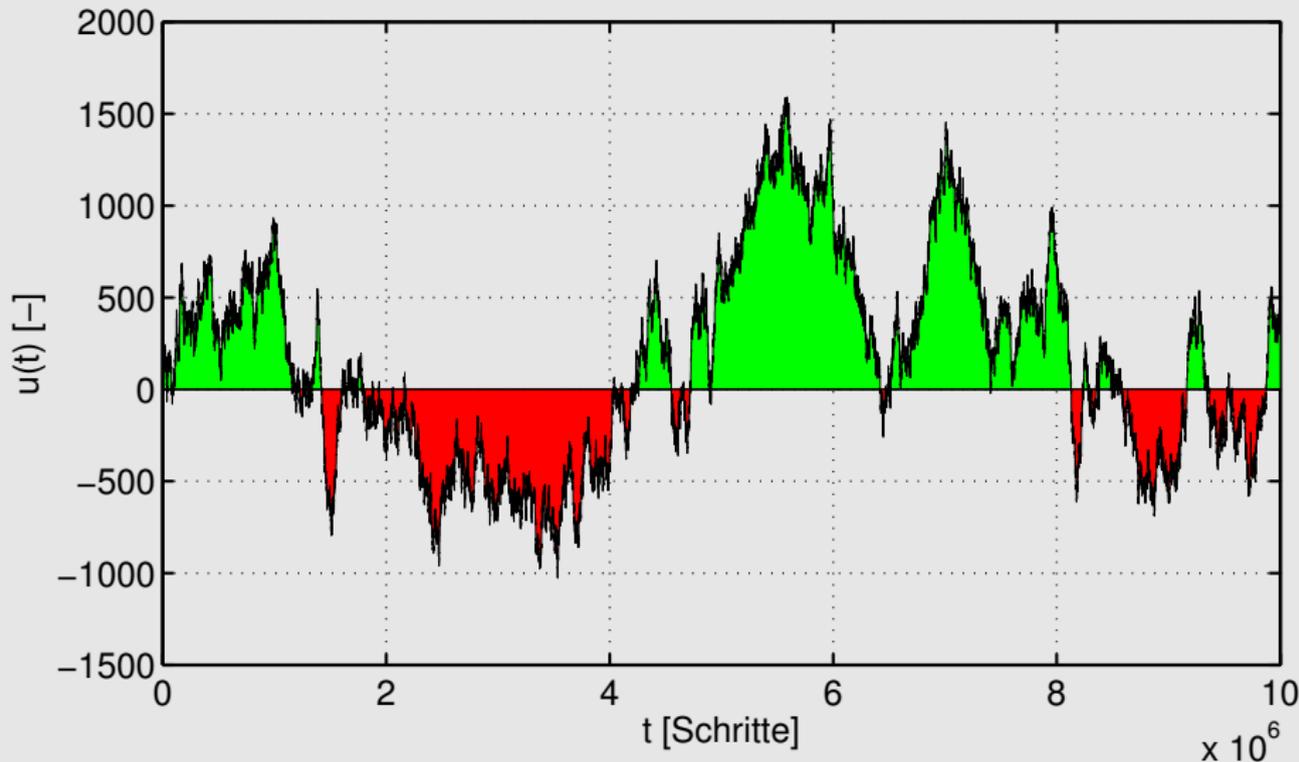


Wahrscheinlichkeit pro Zeit, dass eine Feldumkehr stattfindet,

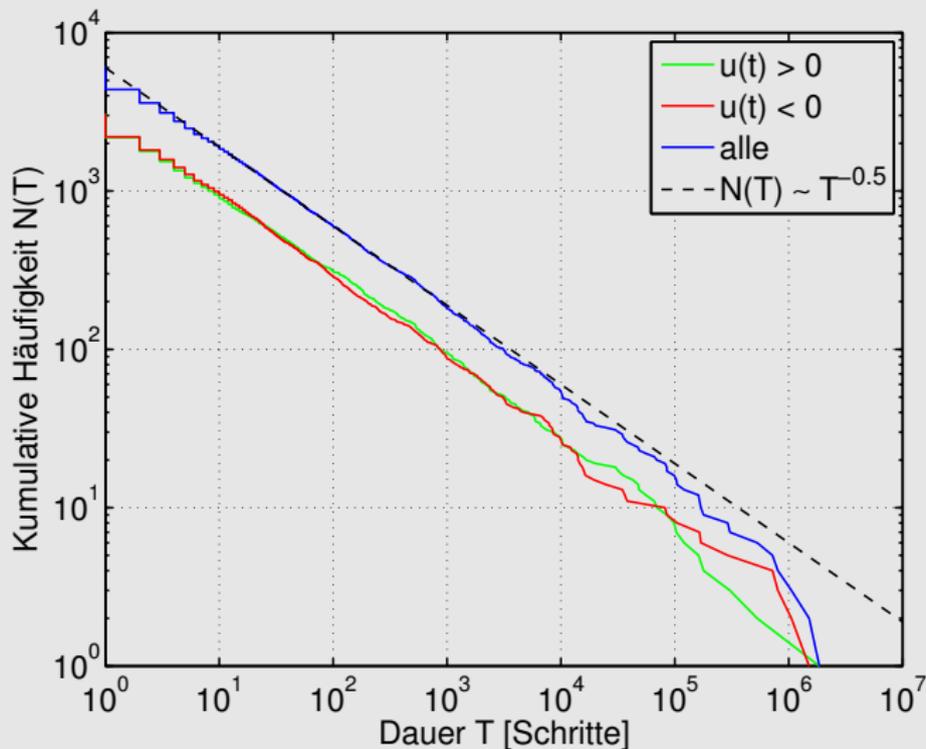
$$p(T) = -\frac{\partial}{\partial t} P(T + t|T)|_{t=0} = \frac{D}{T}$$

sinkt mit der Zeit T , welche die Polarität schon konstant ist.

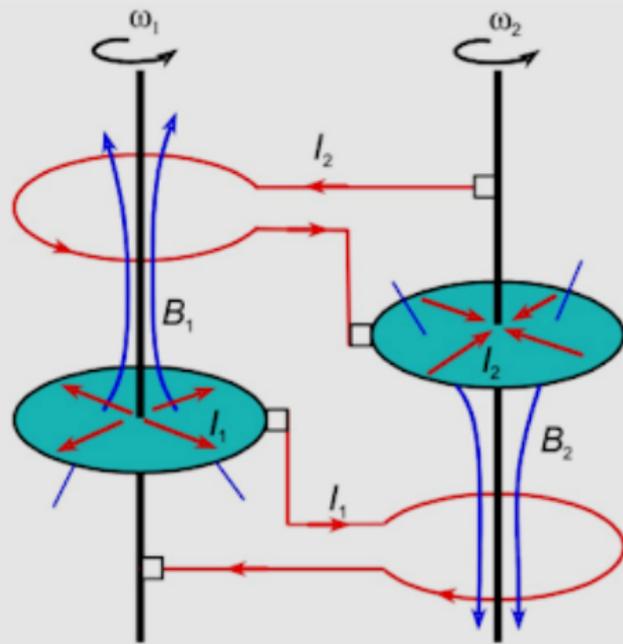
Einfache Modellvorstellung: Brownsche Bewegung (Random Walk)



Einfache Modellvorstellung: Brownsche Bewegung (Random Walk)



Geokoppelte Dynamos (Rikitake, 1958)

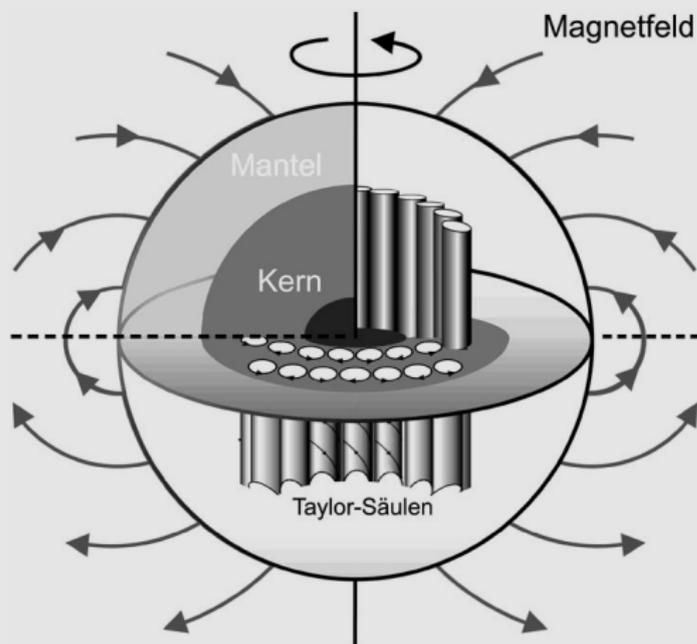


Quelle: Danca & Codreanu, 2011

Modell aus 2 gekoppelten
Dynamos

Sagt chaotisches Verhalten
= unregelmäßige Wechsel
der Polarität vorher

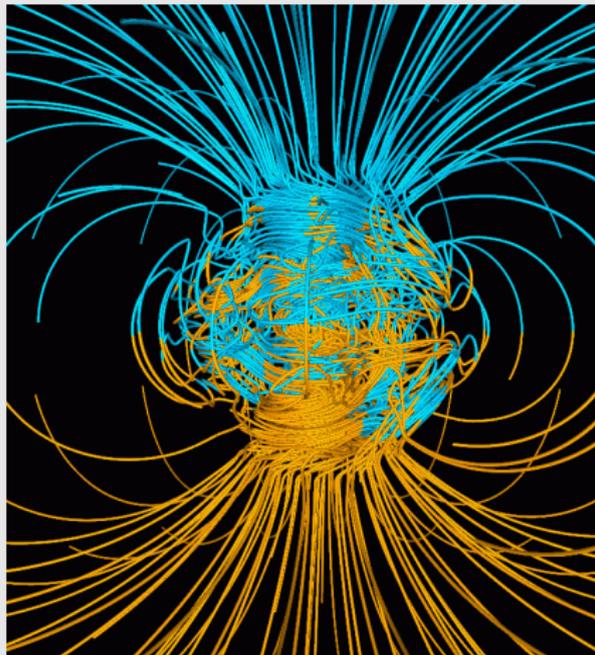
Konvektion im Erdkern – Taylor-Säulen



Quelle: Clauser, Einführung in die Geophysik

Erklärt, wie durch thermische Konvektion im Erdkern ein stabiles Magnetfeld entstehen kann.

Magnetohydrodynamische Simulationen (Glatzmaier-Roberts-Model)

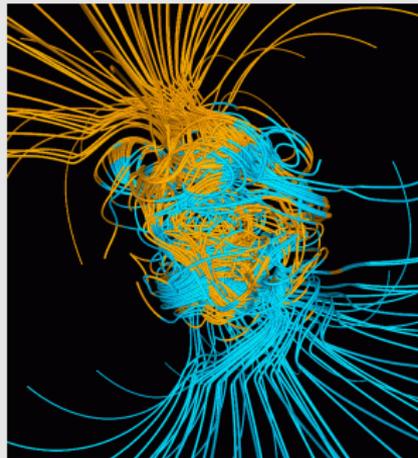


Quelle: G. A. Glatzmaier

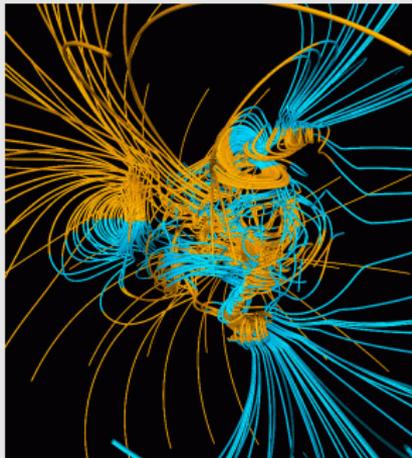
Feldlinien des regulären Magnetfelds (hauptsächlich Dipolfeld an der Erdoberfläche)

Magnetohydrodynamische Simulationen (Glatzmaier-Roberts-Model)

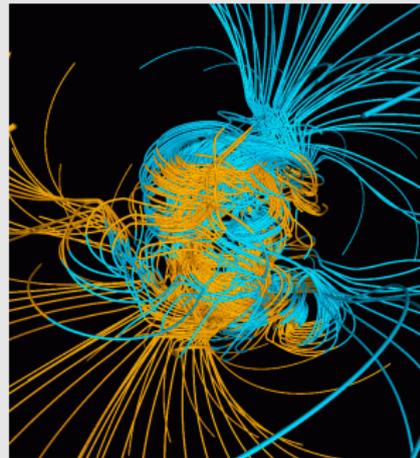
kurz vor Feldumkehr



während Feldumkehr



kurz nach Feldumkehr



Quelle: G. A. Glatzmaier

Magnetfelder in Materie

Elektronen und Protonen besitzen durch ihren Bahndrehimpuls und ihren Spin ein magnetisches Moment.



Zusätzliches Magnetfeld auf der atomaren Skala



Zusätzliches makroskopisches Magnetfeld, wenn sich die magnetischen Momente nicht komplett kompensieren

Magnetfelder in Materie

Magnetisierung: Das makroskopische Magnetfeld der Atome ist in \vec{B} enthalten, aber nicht in \vec{H} .

Wird stattdessen durch die Magnetisierung \vec{M} beschrieben:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

\vec{M} = totales magnetisches Moment pro Volumen

Magnetische Polarisation:

$$\vec{J} = \mu_0 \vec{M}$$



$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{J}$$

Magnetfelder in Materie

Magnetische Suszeptibilität: Im einfachsten Fall lineare Abhängigkeit

$$\vec{M} = \chi \vec{H},$$

mit χ = magnetische Suszeptibilität des Mediums

- Medien mit $\chi > 0$ verstärken externe Magnetfelder.
- Medien mit $\chi < 0$ schwächen externe Magnetfelder.

Magnetische Permeabilität:

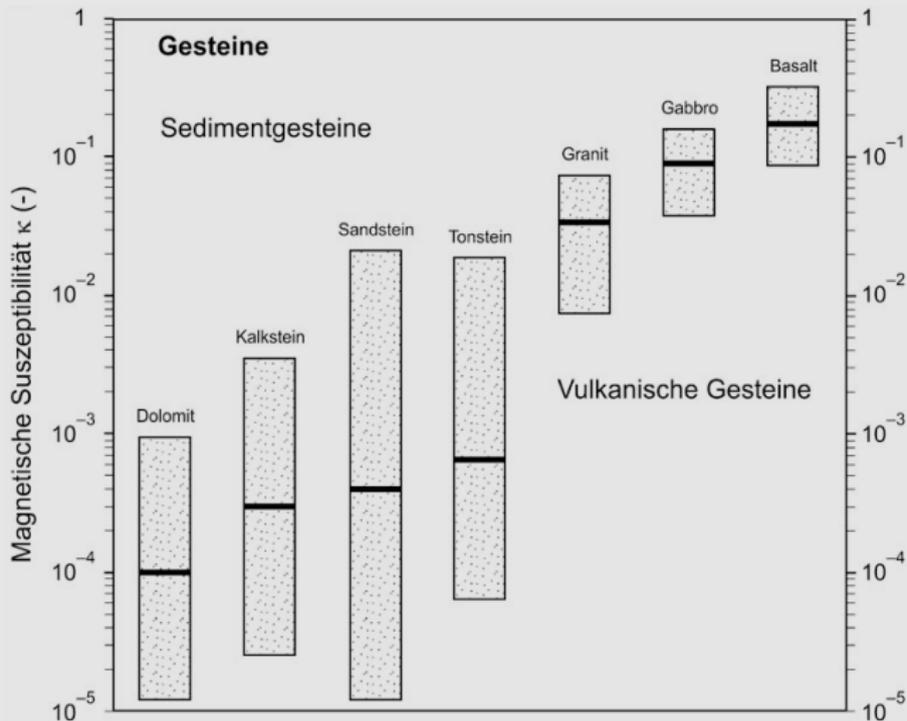
$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$$

mit

$\mu_r = 1 + \chi$ = relative magnetische Permeabilität des Mediums

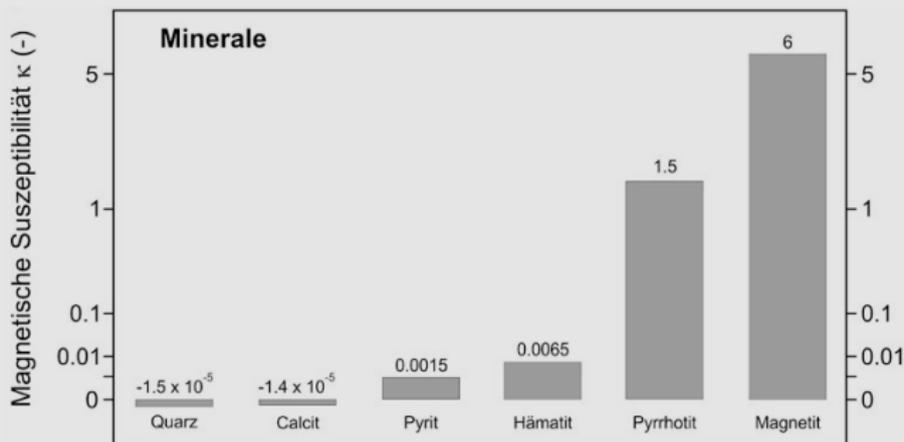
$\mu = \mu_0 \mu_r$ = absolute magnetische Permeabilität des Mediums

Magnetische Suszeptibilität von Gesteinen



Quelle: Clauser, Einführung in die Geophysik

Magnetische Suszeptibilität von Gesteinen



Quelle: Clauser, Einführung in die Geophysik



Selbst geringe Anteile stark magnetisierbarer Minerale haben einen großen Einfluss auf die magnetische Suszeptibilität eines Gesteins.

Magnetische Suszeptibilität in CGS-Einheiten

Im Gauß-CGS-System:

- $\mu_0 = 1$
- B und H haben dieselbe Einheit: $1 \text{ Gs} = 1 \frac{\sqrt{\text{g cm}}}{\text{s}}$

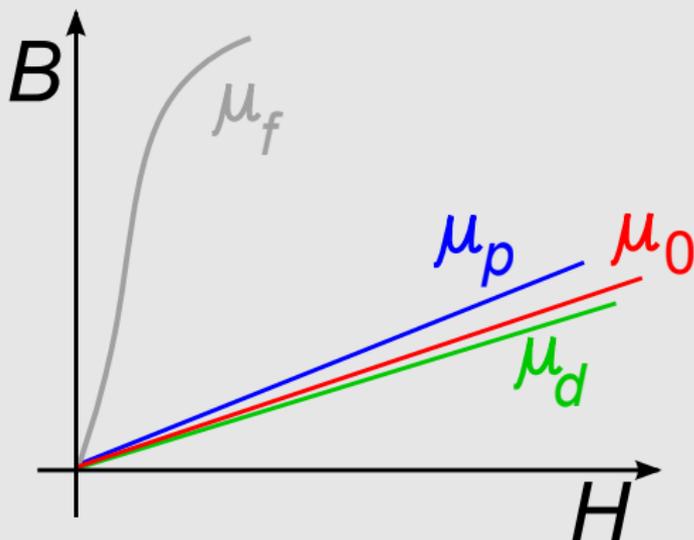
Aber:

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{M} = (1 + 4\pi \chi) \vec{H}.$$



Werte von χ sind im Gauß-CGS-System um den Faktor 4π kleiner als SI-Einheiten, obwohl in beiden Systemen dimensionslos.

Typen des Magnetismus in Materie



Quelle: Wikipedia

- Diamagnetismus
- Paramagnetismus
- Ferromagnetismus
- Antiferromagnetismus und Ferrimagnetismus

Paramagnetismus

Wirkung: leichte Verstärkung externer Magnetfelder,

$$\chi > 0, \quad \mu_r > 1, \quad \mu > \mu_0$$

Auftreten: wenn ungepaarte Elektronen vorhanden sind

Entstehung: bevorzugte Ausrichtung Spins (und Bahndrehimpulsen) in einem äußeren Magnetfeld

Typische Größenordnung: $\chi \approx 10^{-3}$

Temperaturabhängigkeit: $\chi \sim \frac{1}{T}$

Weitere Eigenschaften: linear und reversibel; χ hängt nicht von H ab

Relevanz in den Geowissenschaften: gering

Diamagnetismus

Wirkung: leichte Abschwächung externer Magnetfelder,

$$\chi < 0, \quad \mu_r < 1, \quad \mu < \mu_0$$

Auftreten: in allen Medien, sofern nicht durch andere Typen des Magnetismus überdeckt

Entstehung: Präzession von Spins im Magnetfeld (kompliziert)

Typische Größenordnung: $\chi \approx -10^{-5}$

Temperaturabhängigkeit: schwach

Weitere Eigenschaften: linear und reversibel; χ hängt nicht von H ab

Relevanz in den Geowissenschaften: gering

Ferromagnetismus

Wirkung: deutliche Verstärkung externer Magnetfelder; normalerweise stärker als das externe Magnetfeld,

$$\chi \gg 1, \quad \mu_r \gg 1, \quad \mu \gg \mu_0$$

Auftreten: wenn die Dichte ungepaarter Elektronen so groß ist, dass diese einander beeinflussen; bei $T = 20^\circ\text{C}$ nur in Eisen, Nickel und Cobalt

Entstehung: konstante Ausrichtung von Spins über größere Bereiche

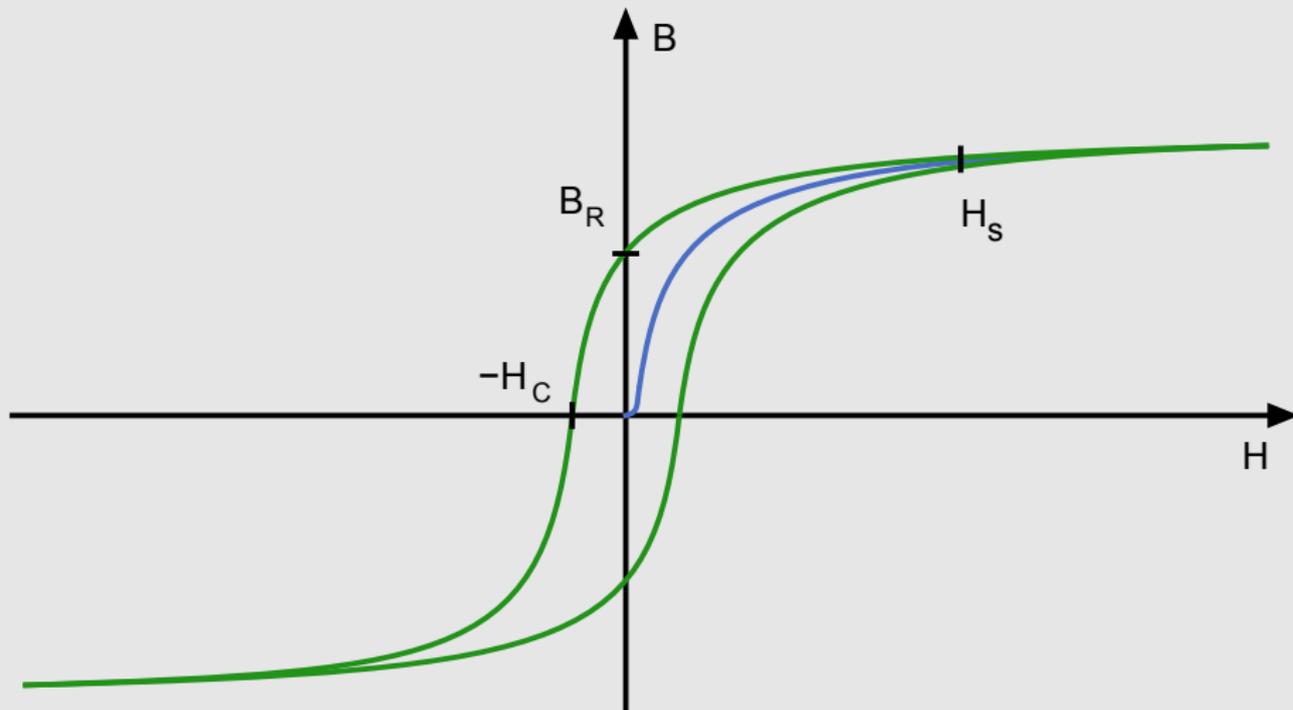
Typische Größenordnung: $\chi \approx 1000$

Temperaturabhängigkeit: Effekt verschwindet oberhalb der material-spezifischen Curie-Temperatur T_C ; Material wird paramagnetisch

Weitere Eigenschaften: stark nichtlinear mit Sättigung, Hysterese und Remanenz; χ , μ_r und μ sind nicht konstant

Relevanz in den Geowissenschaften: gering, außer dass metallisches Eisen Messungen des Magnetfeldes stört

Typische Hysteresekurve eines ferromagnetischen Materials



Quelle: Wikipedia

Antiferromagnetismus und Ferrimagnetismus

Wirkung: wie Ferromagnetismus, aber mit entgegengesetzten und sich dadurch mehr oder weniger gut kompensierenden magnetischen Momenten

Unterscheidung: weitgehende Kompensation bei Antiferromagnetismus; deutlicher verbleibender makroskopischer Effekt bei Ferrimagnetismus

Auftreten: in eisenhaltigen Mineralen; hauptsächlich Magnetit, Pyrrhotit und Hämatit (sehr schwach)

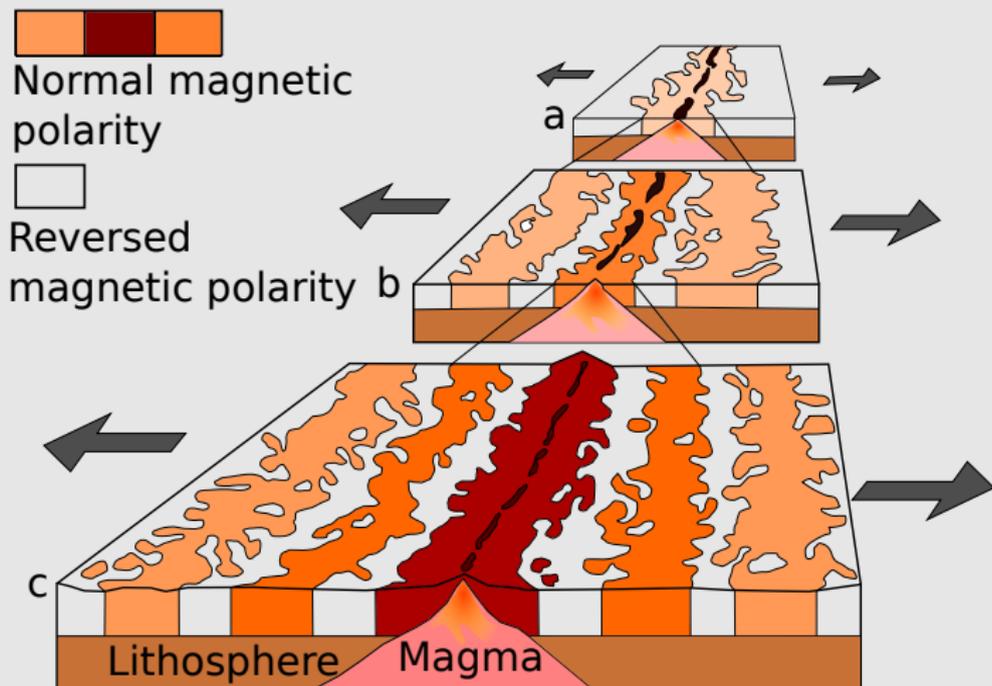
Entstehung: antiparallele Ausrichtung von Spins über größere Bereiche

Typische Größenordnung: $\chi \approx 1$

Temperaturabhängigkeit: Effekt verschwindet oberhalb der material-spezifischen Néel-Temperatur T_N ; Material wird paramagnetisch

Relevanz in den Geowissenschaften: hoch (Paläomagnetik, geomagnetische Prospektion)

Magnetische Streifenmuster



Quelle: Wikipedia

Hauptgebiete

- Erzvorkommen
- Altlasten
- Archäologie

Vergleich mit Schwereanomalien

Magnetische Anomalien sind

- meist stärker als Schwereanomalien (relativ zum Hauptfeld), aber
- von der Form her komplizierter als Schwereanomalien.

Dipol im Untergrund

Einfachste Annahme: magnetischer Dipol mit Dipolmoment \vec{m} im Koordinatenursprung (irgendwo im Untergrund)



Zusätzliches Magnetfeld

$$\delta\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \hat{x})\hat{x} - \vec{m}}{|\vec{x}|^3}$$

Dipol im Untergrund

Üblicherweise wird nur die Totalintensität

$$|\vec{B}(\vec{x})| = |\vec{B}_0 + \delta\vec{B}(\vec{x})|$$

gemessen mit $\vec{B}_0 =$ ungestörtes Magnetfeld am jeweiligen Ort.

↓ wenn $|\delta\vec{B}(\vec{x})| \ll |\vec{B}_0|$

$$\delta B(\vec{x}) = |\vec{B}(\vec{x})| - |\vec{B}_0| \approx \delta\vec{B}(\vec{x}) \cdot \hat{B}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \hat{x})\hat{x} - \vec{m}}{|\vec{x}|^3} \cdot \hat{B}_0$$

Dipol bei Magnetisierung durch das aktuelle Magnetfeld

Im einfachsten Fall:

$$\vec{m} = V\vec{M} = \chi V\vec{H}_0 = \frac{\chi V}{\mu_0} \vec{B}_0$$

mit $V = \text{Volumen}$



$$\delta B(\vec{x}) = \frac{\chi V}{4\pi} \frac{3(\vec{B}_0 \cdot \hat{x})\hat{x} - \vec{B}_0}{|\vec{x}|^3} \cdot \hat{B}_0 = \frac{\chi V B_0}{4\pi} \frac{3 \cos^2 \alpha - 1}{|\vec{x}|^3}$$

mit $\alpha = \text{Winkel zwischen } \vec{B}_0 \text{ und } \vec{x}$

Profile in magnetischer Nord-Süd-Richtung

