

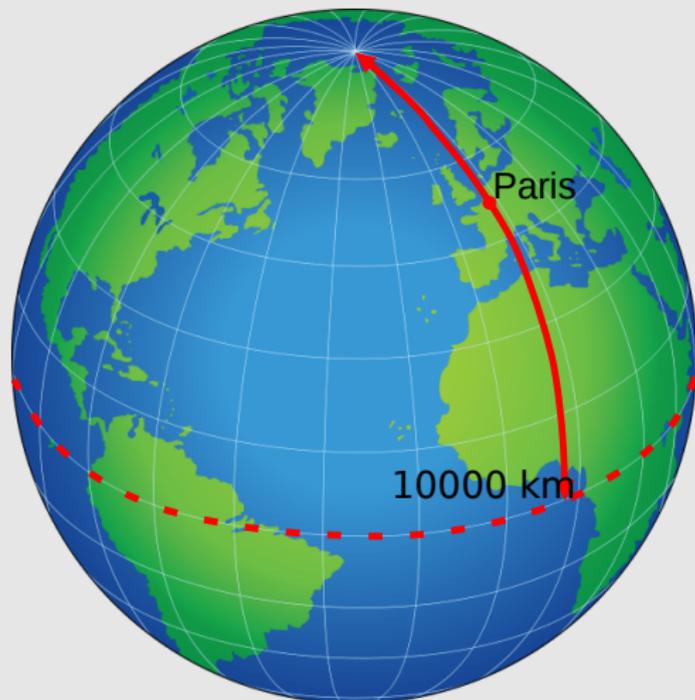
Form und Schwerefeld der Erde

Stefan Hergarten

Institut für Geo- und Umweltnaturwissenschaften
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg



Historische Definition des Meters (1799)



$$r = \frac{40\,000 \text{ km}}{2\pi}$$

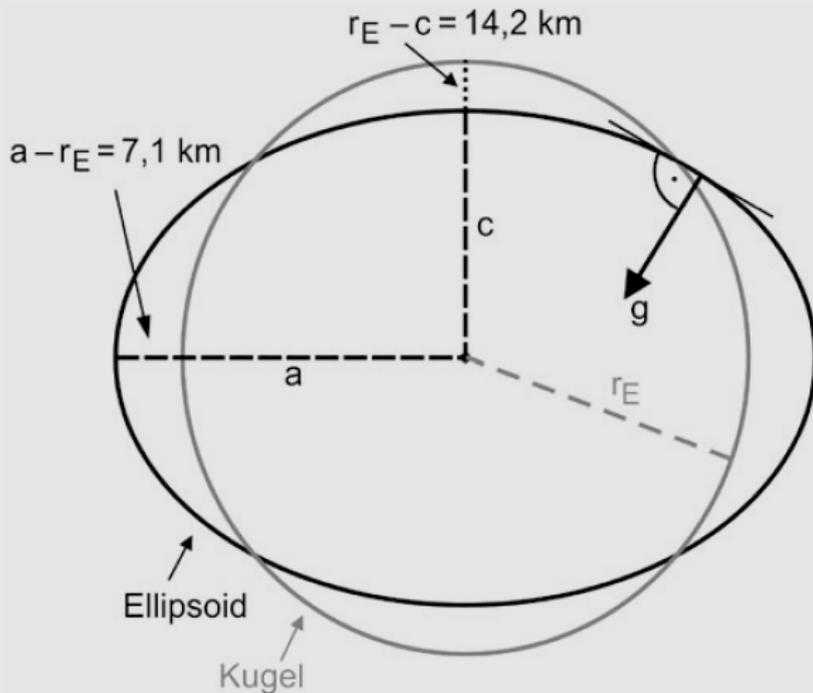
$$= 6366 \text{ km}$$

$$1^\circ \text{ NS} = \frac{40\,000 \text{ km}}{360^\circ}$$

$$= 111.11 \text{ km}$$

Quelle: Wikipedia

Die Ellipsoidform der Erde



Quelle: Clauser, Einführung in die Geophysik

Referenzellipsoid nach dem World Geodetic System 1984 (WGS 84)

Große Halbachse (Äquatorradius)

$$a = 6\,378\,137 \text{ m}$$

Abplattung

$$f = \frac{a - c}{a} = \frac{1}{298.257223563}$$



Kleine Halbachse (Polradius)

$$c = 6\,356\,752.3142 \text{ m}$$

Mittlerer Radius

$$r = \sqrt[3]{a^2 c} = 6\,371\,001 \text{ m}$$

Länderspezifische Bezugssysteme

Ozeanoberfläche entspricht nicht genau dem Referenzellipsoid.



Unterschiedliche lokale Ellipsoide zur besseren Anpassung.

Neue Rheinbrücke ist ein Reifall

Laufenburg (dpa). Beim Bau der neuen Rheinbrücke zwischen dem deutschen und dem Schweizer Teil der Stadt Laufenburg ist eine **peinliche Panne** passiert: Zwischen beiden Seiten tut sich ein Höhenunterschied von 54 Zentimetern auf. Der Grund ist die grundsätzlich unterschiedliche Höhenberechnung auf beiden Seiten der Grenze. Während die Schweiz das Niveau des Mittelmeers zu Grunde legt, orientiert sich Deutschland an der Nordsee. „Die Differenz von 27 Zentimetern ist natürlich bekannt, und auf dem Papier war alles klar“, erläuterte Beat von Arx, Abteilungsleiter im Bauamt des Schweizer Kantons Aargau. In der Praxis habe es dann aber **gehapert**: Auf Schweizer Seite hätte das Niveau um 27 Zentimeter angehoben werden müssen. Stattdessen sei es aber um 27 Zentimeter gesenkt worden. Auf deutscher Seite muss nun der Straßenanschluss tiefer gelegt werden, erläuterte Wolfgang Schädel vom Straßenbauamt in Bad Säckingen. Für die Kosten komme die Haftpflichtversicherung des Ingenieurbüros auf.

Quelle: Weser Kurier Bremen

Breitengrade auf dem Referenzellipsoid

Geozentrische Breite ϕ_{geoz}

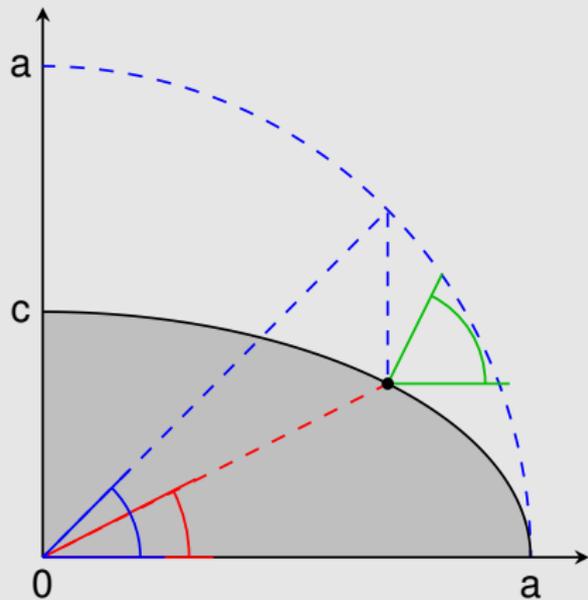
Entspricht den üblichen Kugelkoordinaten

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r \cos \phi_{\text{geoz}} \cos \lambda \\ r \cos \phi_{\text{geoz}} \sin \lambda \\ r \sin \phi_{\text{geoz}} \end{pmatrix}$$

Kommt bei allen Darstellungen des Schwerfeldes außerhalb der Erde vor.

Darstellung des Referenzellipsoids ist umständlich:

$$r = \frac{a}{\sqrt{\cos^2 \phi_{\text{geoz}} + \left(\frac{a}{c}\right)^2 \sin^2 \phi_{\text{geoz}}}}$$



Breitengrade auf dem Referenzellipsoid

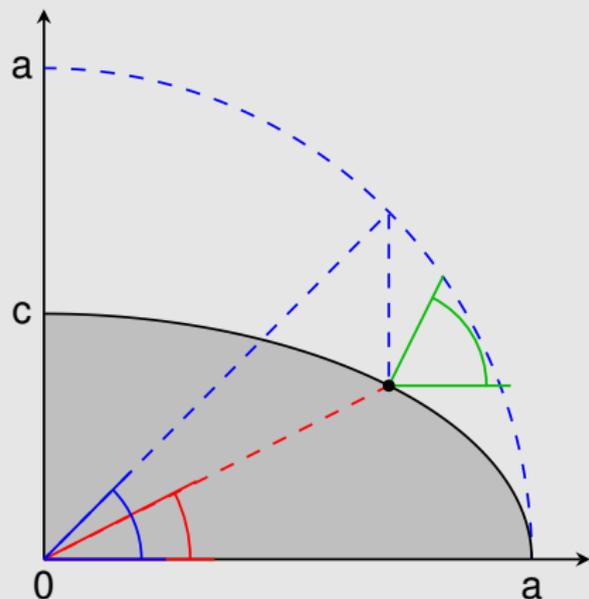
Reduzierte Breite ϕ_{red}

Entspricht elliptischen Koordinaten

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r \cos \phi_{\text{red}} \cos \lambda \\ r \cos \phi_{\text{red}} \sin \lambda \\ \frac{c}{a} r \sin \phi_{\text{red}} \end{pmatrix}$$

Fläche mit $r = a$ ist das Referenzellipsoid.

Alle Flächen mit $r = \text{const.}$ sind Ellipsoide mit derselben Abplattung wie das Referenzellipsoid.



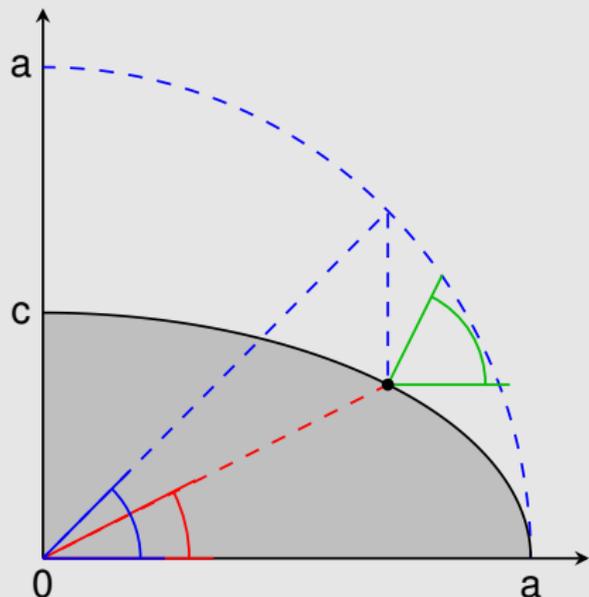
Breitengrade auf dem Referenzellipsoid

Geographische Breite ϕ_{geog}

Winkel zwischen der Normalen auf das Ellipsoid und der Äquatorebene.

Auch als geodätische Breite oder ellipsoidische Breite bezeichnet.

Aus dem höchsten Sonnenstand oder der Position von Sternen messbar.



Breitengrade auf dem Referenzellipsoid

Zusammenhang zwischen den verschiedenen Definitionen:

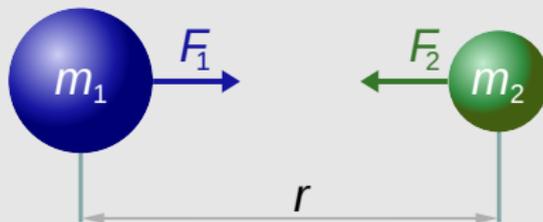
$$\phi_{\text{geoz}} \leq \phi_{\text{red}} \leq \phi_{\text{geog}}$$

$$\tan \phi_{\text{geoz}} = \frac{c}{a} \tan \phi_{\text{red}} = (1 - f) \tan \phi_{\text{red}}$$

$$\tan \phi_{\text{red}} = \frac{c}{a} \tan \phi_{\text{geog}} = (1 - f) \tan \phi_{\text{geog}}$$

Abweichung ist bei $\phi = \pm 45^\circ$ maximal (jeweils $0.096^\circ \hat{=} 10.7 \text{ km}$).

Das Newtonsche Gravitationsgesetz



$$F_1 = F_2 = G \frac{m_1 \times m_2}{r^2}$$

Quelle: Wikipedia, ©Dennis Nilsson

- Aufgestellt von Issac Newton 1687.
- Gilt streng genommen nur für punktförmige Massen.
- Die Gravitationskonstante $G = 6.67408(31) \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$ ist eine der am wenigsten genau bestimmten Naturkonstanten.
- $Gm_e = 3.986004415 \times 10^{14} \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2}$ (m_e = Masse der Erde) ist deutlich genauer bestimmt.

Das Newtonsche Gravitationsgesetz

In Vektorform mit Massen m_1 und m_2 an den Orten \vec{x}_1 und \vec{x}_2 :

$$\vec{F}_2 = - \frac{Gm_1 m_2}{|\vec{r}|^2} \hat{r}$$

mit

$$\vec{r} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1 = \text{Vektor von Masse 1 zu Masse 2}$$

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \text{Einheitsvektor in Richtung von } \vec{r}$$

Wird oft auch in der Form

$$\vec{F}_2 = - \frac{Gm_1 m_2}{|\vec{r}|^3} \vec{r} = - \frac{Gm_1 m_2}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^3} (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)$$

geschrieben.

Das Gravitationsfeld

Grundgesetz der Mechanik (I. Newton 1687, L. Euler 1750):

$$\vec{F} = m \vec{a} \quad (\vec{a} = \text{Beschleunigung})$$



Beschleunigung auf Masse m_2 ist von dieser unabhängig:

$$\vec{a}_2 = \frac{\vec{F}_2}{m_2} = - \frac{Gm_1}{|\vec{r}|^2} \hat{r}$$

(„Alle Körper fallen gleichschnell“ – „schwere Masse = träge Masse“)

Das Gravitationsfeld

Die auf eine hypothetische Punktmasse am Ort \vec{x} wirkende Gravitationsbeschleunigung wird als Gravitationsfeld $\vec{g}(\vec{x})$ bezeichnet.

- Gravitationsfeld ist ein Vektorfeld.
- SI-Einheit: $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
In der Geophysik noch häufig verwendet: $1 \text{ Gal} = 1 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$ zu Ehren von Galileo Galilei (1564–1652)
 $1 \text{ mGal} = 10^{-3} \text{ Gal} = 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 10 \frac{\mu\text{m}}{\text{s}^2}$
- Gravitationsfeld einer Punktmasse m am Ort $\vec{\xi}$:

$$\vec{g}(\vec{x}) = - \frac{Gm}{|\vec{x} - \vec{\xi}|^2} \frac{\vec{x} - \vec{\xi}}{|\vec{x} - \vec{\xi}|}$$

Superposition von Gravitationsfeldern

Die Gravitationsfelder mehrerer Massen überlagern sich linear im Sinne der Vektoraddition.



- Gravitationsfeld von n Punktmassen m_1, \dots, m_n an den Orten $\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_n$:

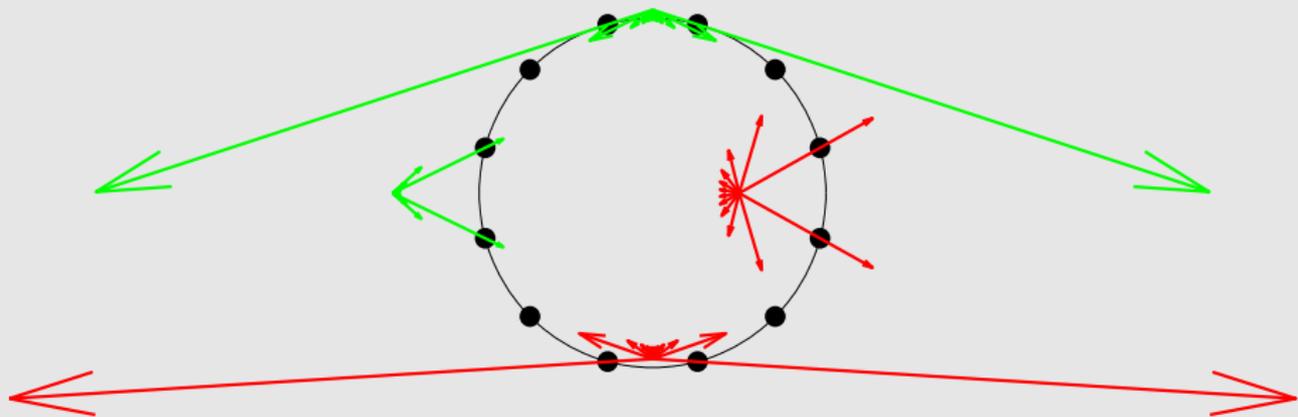
$$\vec{g}(\vec{x}) = -G \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{|\vec{x} - \vec{\xi}_i|^2} \frac{\vec{x} - \vec{\xi}_i}{|\vec{x} - \vec{\xi}_i|}$$

- Gravitationsfeld einer kontinuierlichen Massenverteilung mit einer Dichte $\rho(\vec{\xi})$:

$$\vec{g}(\vec{x}) = -G \int \frac{\rho(\vec{\xi})}{|\vec{x} - \vec{\xi}|^2} \frac{\vec{x} - \vec{\xi}}{|\vec{x} - \vec{\xi}|} d^3\xi$$

Kugelsymmetrische Massenverteilungen

Gravitationsfeld einer homogenen Kugelschale mit Mittelpunkt $\vec{0}$ und Radius a :



$$\vec{g}(\vec{x}) = \begin{cases} -\frac{Gm}{|\vec{x}|^2} \hat{x} & \text{für } |\vec{x}| > a \\ 0 & \text{für } |\vec{x}| < a \end{cases}$$

wobei m die Gesamtmasse der Kugelschale ist.

Kugelsymmetrische Massenverteilungen

- Außerhalb der Kugelschale wirkt die Massenverteilung wie eine gleich große Punktmasse.
- Im Inneren der Kugelschale hebt sich die Gravitation der Massen komplett auf.



Gravitationsfeld einer beliebigen kugelsymmetrischen Massenverteilung:

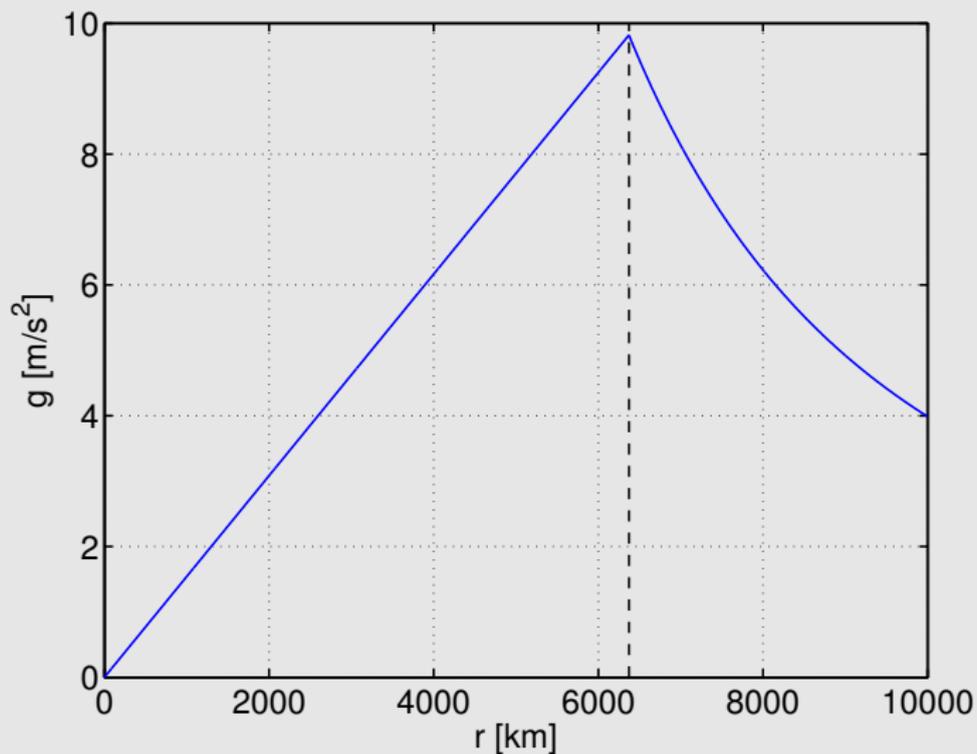
$$\vec{g}(\vec{x}) = - \frac{G m(r)}{r^2} \hat{x}$$

mit

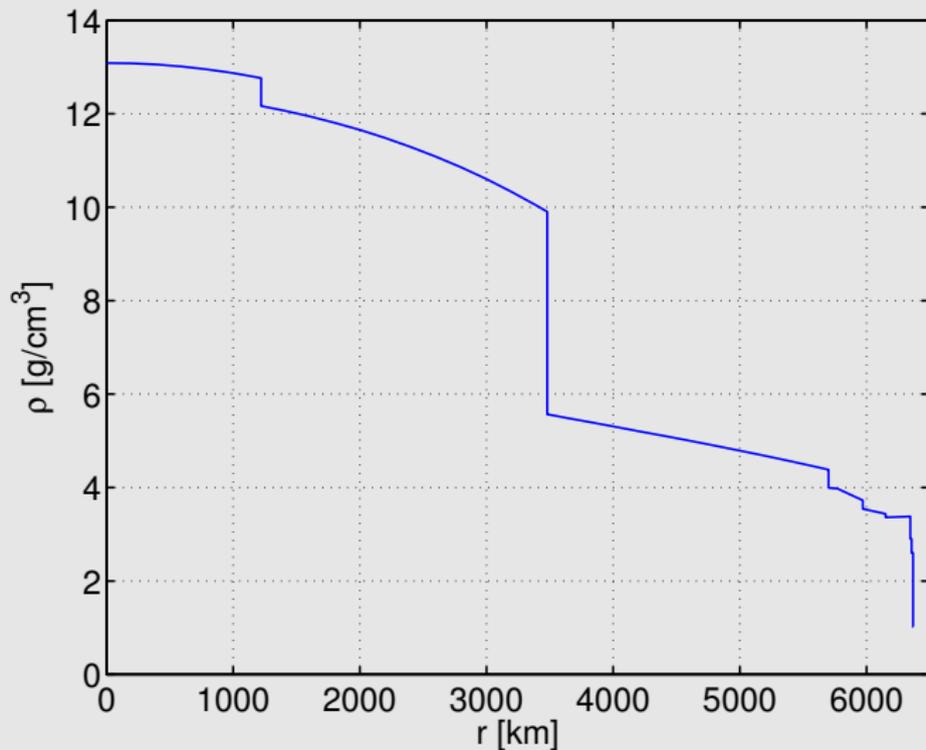
$$r = |\vec{x}|$$

$$m(r) = \text{Masse innerhalb der Kugel vom Radius } r$$

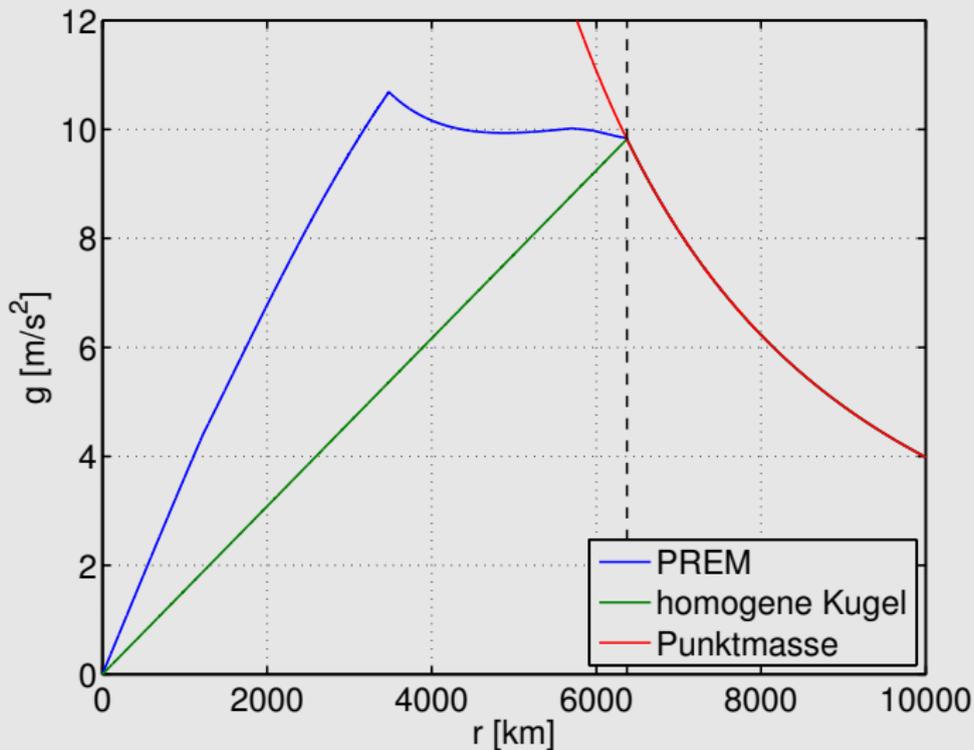
Erde als homogene Kugel



Dichte nach dem Preliminary Reference Earth Model (PREM)



Erde mit realistischer Massenverteilung (PREM)



Darstellung des Gravitationsfelds durch ein skalares Potential

Das vektorwertige Gravitationsfeld $\vec{g}(\vec{x})$ lässt sich als Gradient eines skalaren Potentials $U(\vec{x})$ darstellen:

$$\vec{g}(\vec{x}) = -\nabla U(\vec{x})$$

Partielle Ableitungen

Betrachte Funktionen mehrerer Variablen $f(x_1, \dots, x_n)$ oder eines Vektors $f(\vec{x})$.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, \dots, x_n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h}$$

ist die partielle Ableitung von f bzgl. x_i .

Man stellt sich hierbei $f(x_1, \dots, x_n)$ als Funktion von x_i vor und nimmt an, dass alle anderen Variablen konstant sind.

Ist auch die Zeit t unter den Variablen, wird die partielle Ableitung nach t oft mit einem Punkt abgekürzt:

$$\dot{f}(t, \dots) = \frac{\partial}{\partial t} f(t, \dots)$$

Der Gradient

Die partiellen Ableitungen (speziell wenn es sich um räumliche Koordinaten handelt) werden oft zu einem Vektor, dem Gradienten der Funktion, zusammengefasst:

$$\operatorname{grad} f(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f(\vec{x}) \\ \dots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} f(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

Eigenschaften des Gradienten

- Ist \hat{e} ein Einheitsvektor, dann ist $\nabla f(\vec{x}) \cdot \hat{e}$ die Ableitung (Steigung) von f in Richtung von \hat{e} .
- $\nabla f(\vec{x})$ zeigt in die Richtung, wo $f(\vec{x})$ am stärksten ansteigt.
- $|\nabla f(\vec{x})|$ ist die Steigung von $f(\vec{x})$ in Richtung des steilsten Anstiegs.
- $\nabla f(\vec{x})$ steht senkrecht auf den Flächen, wo $f(\vec{x})$ konstant ist.

Darstellung des Gravitationsfelds durch ein skalares Potential

- Punktmasse m am Ort $\vec{\xi}$ (oder kugelsymmetrische Massenverteilung):

$$U(\vec{x}) = - \frac{Gm}{|\vec{x} - \vec{\xi}|} \quad (+ \text{const.})$$

- n Punktmassen m_1, \dots, m_n an den Orten $\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_n$:

$$U(\vec{x}) = - G \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{|\vec{x} - \vec{\xi}_i|} \quad (+ \text{const.})$$

- Kontinuierliche Massenverteilung mit einer Dichte $\rho(\vec{\xi})$:

$$U(\vec{x}) = - G \int \frac{\rho(\vec{\xi})}{|\vec{x} - \vec{\xi}|} d^3\xi \quad (+ \text{const.})$$

Potentielle Energie im Gravitationsfeld

Freie Bewegung einer Masse m im Gravitationsfeld auf einem Weg $\vec{s}(t)$.

Geschwindigkeit: $\vec{v}(t) = \dot{\vec{s}}(t)$

Beschleunigung: $\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \vec{g}(\vec{s}(t)) = -\nabla U(\vec{s}(t))$

Kinetische Energie: $E_{kin}(t) = \frac{1}{2}m|\vec{v}(t)|^2$



$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(E_{kin}(t) + mU(\vec{s}(t))) &= m\vec{v}(t) \cdot \dot{\vec{v}}(t) + m\nabla U(\vec{s}(t)) \cdot \dot{\vec{s}}(t) \\ &= m\vec{v}(t) \cdot (\vec{g}(\vec{s}(t)) + \nabla U(\vec{s}(t))) = 0\end{aligned}$$



$$E_{kin}(t) + mU(\vec{s}(t)) = \text{const}$$

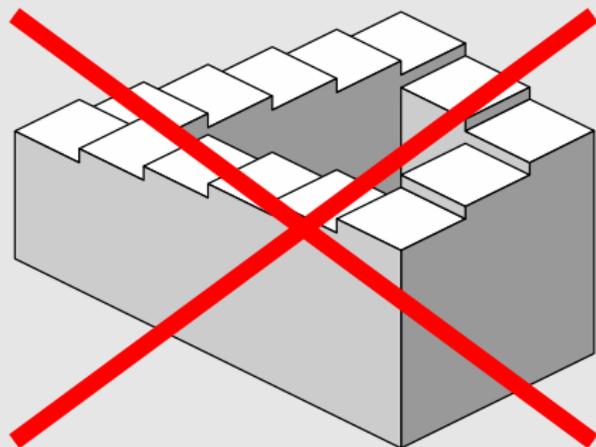
Potentielle Energie im Gravitationsfeld

$E_{pot} = mU$ heißt potentielle Energie; $E_{kin} + E_{pot} = \text{const.}$

Existenz einer Potentialfunktion impliziert:

- Die auf einem Weg zu leistende Arbeit hängt nur von Anfangs- und Endpunkt ab und ist unabhängig davon, welchen Weg wir wählen oder wie schnell wir ihn zurücklegen.
- Die Arbeit auf einer geschlossenen Kurven ist null.

Solche Felder werden als **konservativ** bezeichnet.



Gravitation anderer Körper

Praktisch nur Mond und Sonne relevant.

Beschleunigung in rotierenden Systemen

- Erde um die Polachse
- Mond-Erde um den gemeinsamen Schwerpunkt
- Erde-Sonne um den gemeinsamen Schwerpunkt

Definition der Schwere

Schwere \vec{g} ist die Beschleunigung (Kraft pro Masse) auf einen relativ zur Erde ruhenden Körper.

Beschleunigung in rotierenden Systemen

Stelle Bahnkurve $\vec{x}(t)$ bzgl. einer zeitabhängig rotierenden Basis dar:

$$\vec{x}(t) = R(t)\vec{\xi}(t)$$

mit

$R(t)$ = Drehung bzw. 3×3 -Matrix, aus den rotierenden Basisvektoren

$\vec{\xi}(t)$ = Koordinatenvektor von $\vec{x}(t)$ bzgl. der rotierenden Basis



$$\dot{\vec{x}} = \dot{R}\vec{\xi} + R\dot{\vec{\xi}}$$

$$\ddot{\vec{x}} = \ddot{R}\vec{\xi} + 2\dot{R}\dot{\vec{\xi}} + R\ddot{\vec{\xi}}$$

Beschleunigung in rotierenden Systemen

Spezialfall: Rotation um die x_3 -Achse

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{(t=0)}{=} \mathbf{1}$$

$$\dot{R}(t) = \omega \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) & -\cos(\omega t) & 0 \\ \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{(t=0)}{=} \omega \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\ddot{R}(t) = \omega^2 \begin{pmatrix} -\cos(\omega t) & \sin(\omega t) & 0 \\ -\sin(\omega t) & -\cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{(t=0)}{=} -\omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Beschleunigung in rotierenden Systemen



$$\begin{aligned} \ddot{\vec{x}} \stackrel{(t=0)}{=} & -\omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{\xi} + 2\omega \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{\xi} + \ddot{\xi} \\ = & -\omega^2 \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\omega \begin{pmatrix} -\dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \ddot{\xi} \end{aligned}$$



$$\ddot{\xi} \stackrel{(t=0)}{=} \ddot{\vec{x}} + \omega^2 \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\omega \begin{pmatrix} \dot{\xi}_2 \\ -\dot{\xi}_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \ddot{\vec{x}} + \omega^2 \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\dot{\xi} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$$

Beschleunigung in rotierenden Systemen

Allgemein für beliebige Drehachse mit Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$:

$$\ddot{\xi} \stackrel{(t=0)}{=} \ddot{x} + \omega^2 \vec{\xi}_{\perp} + 2\dot{\xi} \times \vec{\omega}$$

mit

$\dot{\xi}$ = Geschwindigkeit im rotierenden System

$\ddot{\xi}$ = Beschleunigung im rotierenden System

\ddot{x} = echte Beschleunigung

$\vec{\xi}_{\perp}$ = Komponente von $\vec{\xi}$ senkrecht zur Drehachse

$\omega^2 \vec{\xi}_{\perp}$ = Zentrifugalbeschleunigung ($\omega = |\vec{\omega}|$)

$2\dot{\xi} \times \vec{\omega}$ = Coriolis-Beschleunigung

Die Zentrifugalbeschleunigung

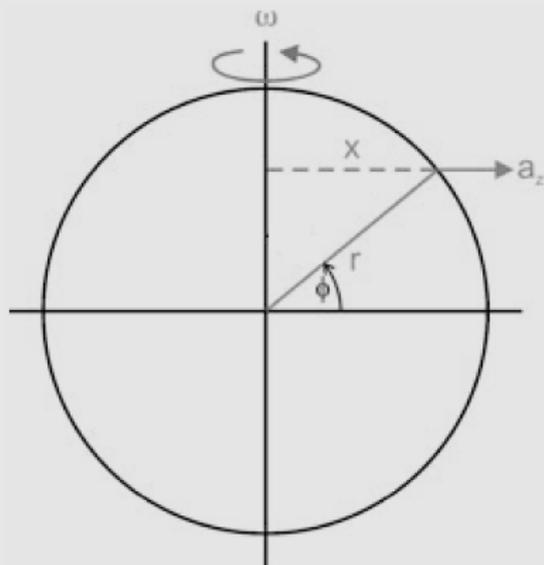
$$\vec{g}_z(\vec{\xi}) = \omega^2 \vec{\xi}_{\perp} = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\xi})$$

- Beschreibt den Einfluss der Rotation des Systems auf einen im rotierenden System ruhenden Körper.
- Senkrecht zur Rotationsachse.
- Betrag auf dem Referenzellipsoid:

$$|\vec{g}_z| = \omega^2 |\vec{\xi}_{\perp}| = \omega^2 a \cos \phi_{\text{red}}$$

- Aber: Nur die Komponente senkrecht zum Referenzellipsoid trägt zur Schwere bei,

$$g_z = -\omega^2 a \cos \phi_{\text{red}} \cos \phi_{\text{geog}}$$



Quelle: Clauser, Einführung in die Geophysik

Die Zentrifugalbeschleunigung

Die Zentrifugalbeschleunigung der Erdrotation ist der einzige dynamische Effekt, der zeitlich konstant ist und somit in die **Normalschwere** einbezogen wird.

Maximale Zentrifugalbeschleunigung (Äquator):

$$g_z^{\max} = -\omega^2 a = 0.0339157 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

mit den Daten aus dem Geodätischen Referenzsystem 1980 (GRS80, praktisch identisch mit WGS84)

$$a = 6\,378\,137 \text{ m}$$

$$\omega = 7.292115 \times 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \text{ (Tageslänge } 86164.10 \text{ s)}$$

Die Zentrifugalbeschleunigung

Normalschwere an Äquator und Polen nach GRS80:

$$g_a = 9.7803267715 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$g_c = 9.8321863685 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Differenz

$$g_a - g_c = -0.051859597 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

stammt zu 65 % aus der Zentrifugalbeschleunigung ($g_z^{\text{max}} = 0.0339157 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)
und zu 35 % aus der Gravitation.

Das Clairaut-Theorem

Von A.-C. Clairaut (1713–65) aufgestellte Relation zwischen der Abplattung der Erde und der Schwere an Pol und Äquator.

Annahme: Rotierende Flüssigkeit unter Gravitation im hydrostatischen Gleichgewicht



$$\frac{a - c}{a} + \frac{g_c - g_a}{g_a} = \frac{5}{2} \frac{\omega^2 a^3}{Gm}$$

Kann auch geschrieben werden als

$$\frac{a - c}{a} + \frac{g_c - g_a}{g_a} = \frac{5}{2} \frac{g_z}{g_g}$$

mit

$$g_z = \omega^2 a = \text{Zentrifugalbeschleunigung am Äquator}$$

$$g_g = \frac{Gm}{a^2} = \text{Gravitationsbeschleunigung einer Punktmasse}$$

Das Clairaut-Theorem

- Das Clairaut-Theorem erlaubt die Bestimmung der Abplattung $f = \frac{a-c}{a}$ aus den Schwerebeschleunigungen an Pol und Äquator und umgekehrt, aber nicht beides.
- Es gibt unendlich viele Massenverteilungen im Erdinneren, die mit dem Clairaut-Theorem konsistent sind.

Das Potential der Zentrifugalbeschleunigung

$$\vec{g}_z(\vec{x}) = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}) = \omega^2 \vec{x}_\perp = -\nabla U_z(\vec{x})$$

mit

$$U_z(\vec{x}) = -\frac{1}{2}\omega^2 |\vec{x}_\perp|^2 = -\frac{1}{2}(\omega r \cos \phi)^2$$

Das Gesamtpotential ist die Summe aus Gravitations- und Zentrifugalpotential

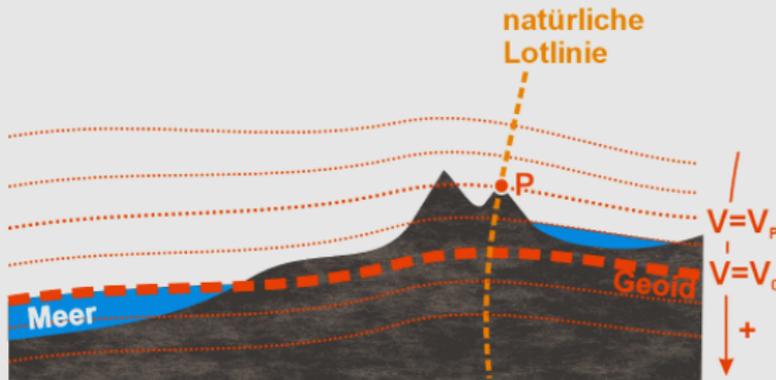
$$U(\vec{x}) = U_g(\vec{x}) + U_z(\vec{x})$$

Das Geoid

Das Geoid ist definiert als die Äquipotentialfläche des Gesamtpotentials (Gravitation der Erde und Rotation)

$$U(\vec{x}) = U_g(\vec{x}) + U_z(\vec{x})$$

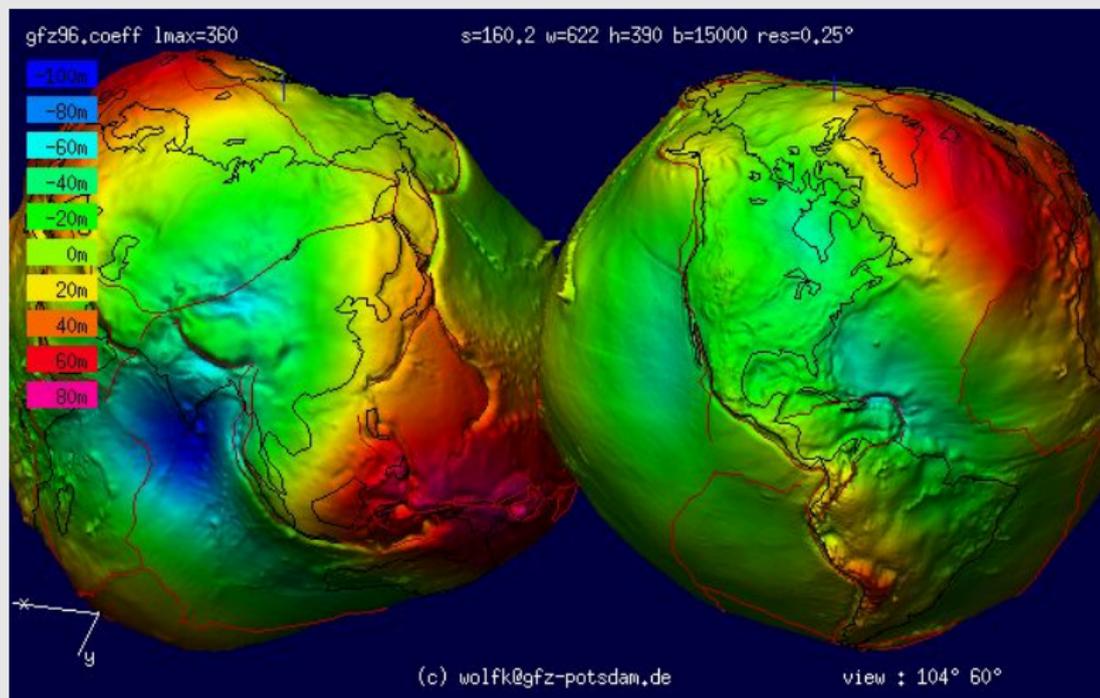
zum Wert $U_0 = -62636853.4 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$.



Das Geoid

- Idee geht auf C. F. Gauß (1777–1855) und J. B. Listing (1808–1882) zurück.
- Immer genauere Bestimmung seit den 1960er Jahren durch Satellitengeodäsie.
- Schwerevektor steht überall senkrecht auf dem Geoid.
- Geoid stimmt mit der freien Oberfläche der Ozeane (ohne Gezeiten) überein.
- Geoid ist keine geometrische Beschreibung der Erdoberfläche, sondern charakterisiert die Massenverteilung im Erdinneren.
- Geoid weicht vom Referenzellipsoid um bis zu -108 m bzw. $+82$ m ab.

Überhöhte Darstellung des Geoids als „Potsdamer Kartoffel“



Quelle: Lexikon der Fernerkundung

Daten des Erde-Mond-Systems

- Masse des Mondes

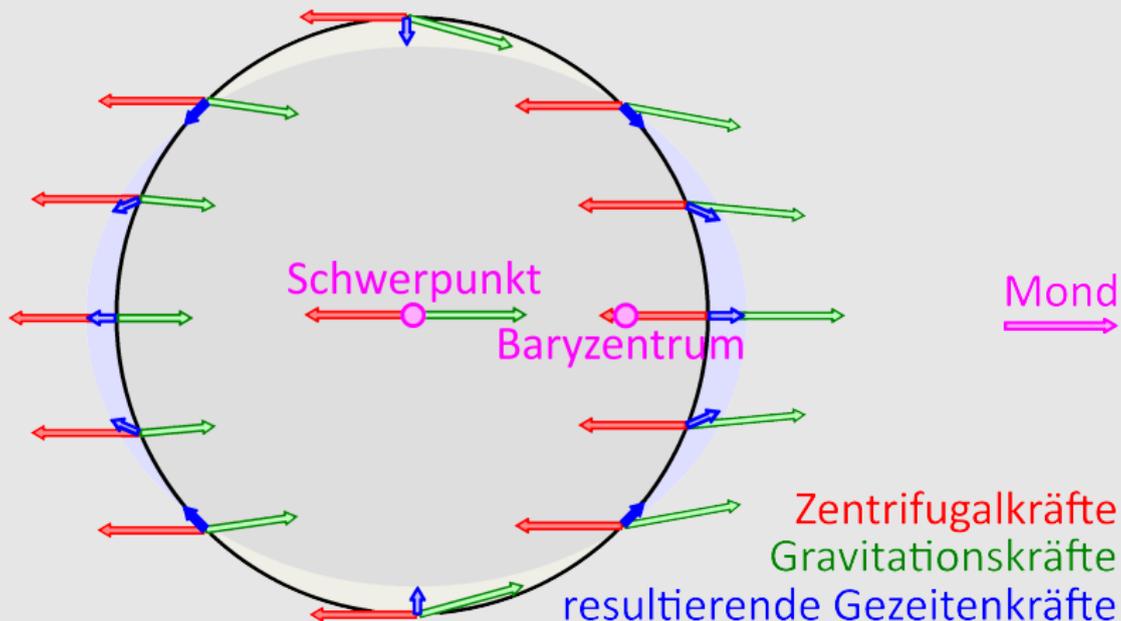
$$m_m = 7.348 \times 10^{22} \text{ kg} \approx \frac{1}{80} m_e$$

- Abstand Mond-Erde

$$d = 384740 \text{ km} \approx 60 r_e$$

- Rotation mit Umlaufzeit $T = 27.3217$ Tage um den gemeinsamen Schwerpunkt.
- Gemeinsamer Schwerpunkt liegt innerhalb der Erde bei etwa $\frac{3}{4} r_e$.
- Neigung der Mondbahn gegen die Erdbahn ca. 5° , gegen die Äquatorebene ca. 18° .

Erklärung durch Gravitations- und Zentrifugalbeschleunigung



Quelle: Wikipedia, ©Lämpel

Arten der Beschreibung

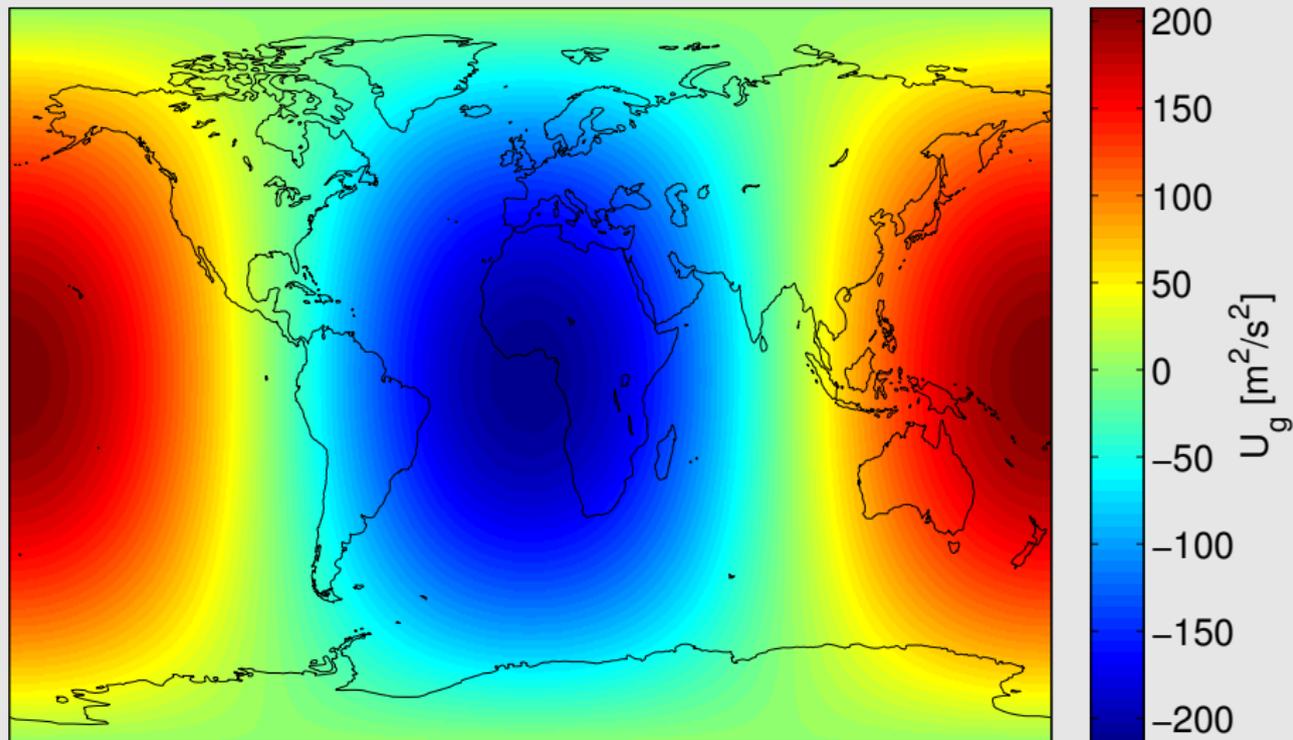
Durch Gravitations- und Zentrifugalbeschleunigung:

- Qualitative Erklärung
- Ermöglicht die Berechnung der zusätzlichen Gezeitenbeschleunigung, also des dynamischen Effekts von Mond und Sonne auf die Schwere.

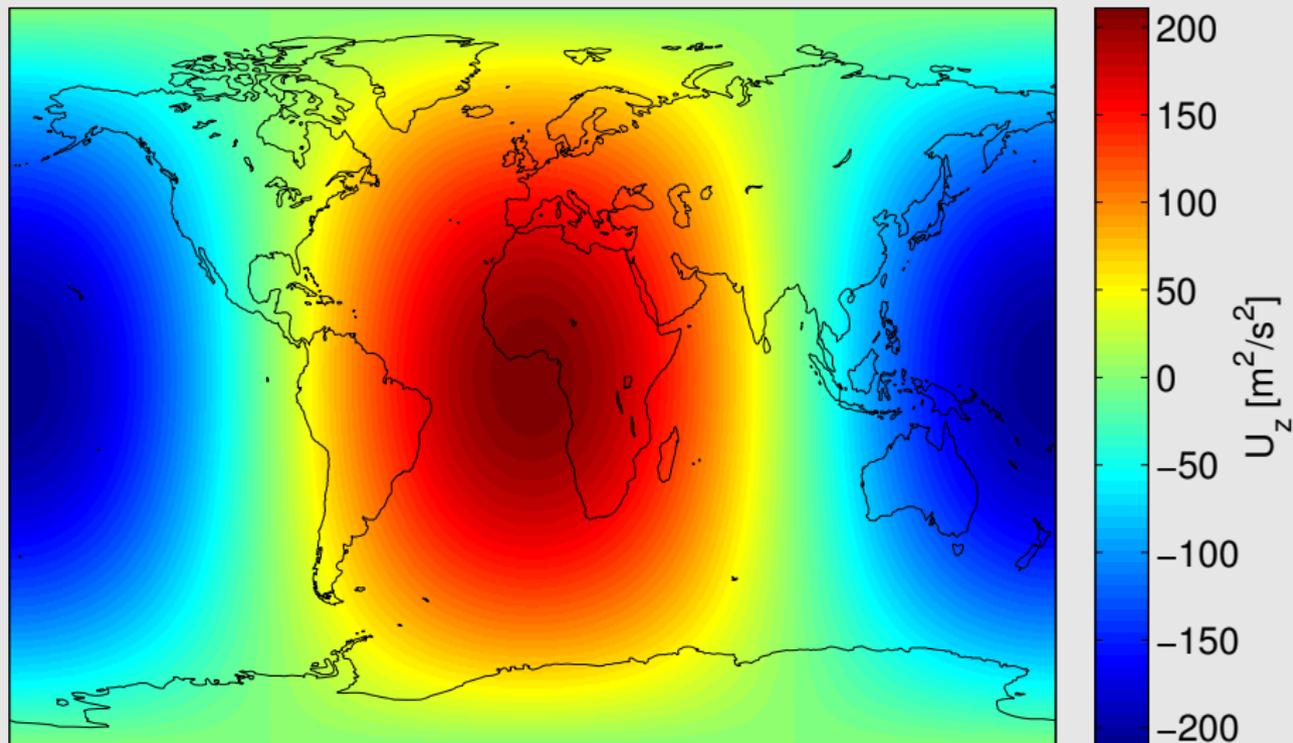
Durch Gravitations- und Zentrifugalpotential:

- Ermöglicht die Berechnung der Verschiebung der Äquipotentialfläche, also der Höhe der Flutberge und Ebбетäler in einem die ganze Erde umspannenden Ozean.

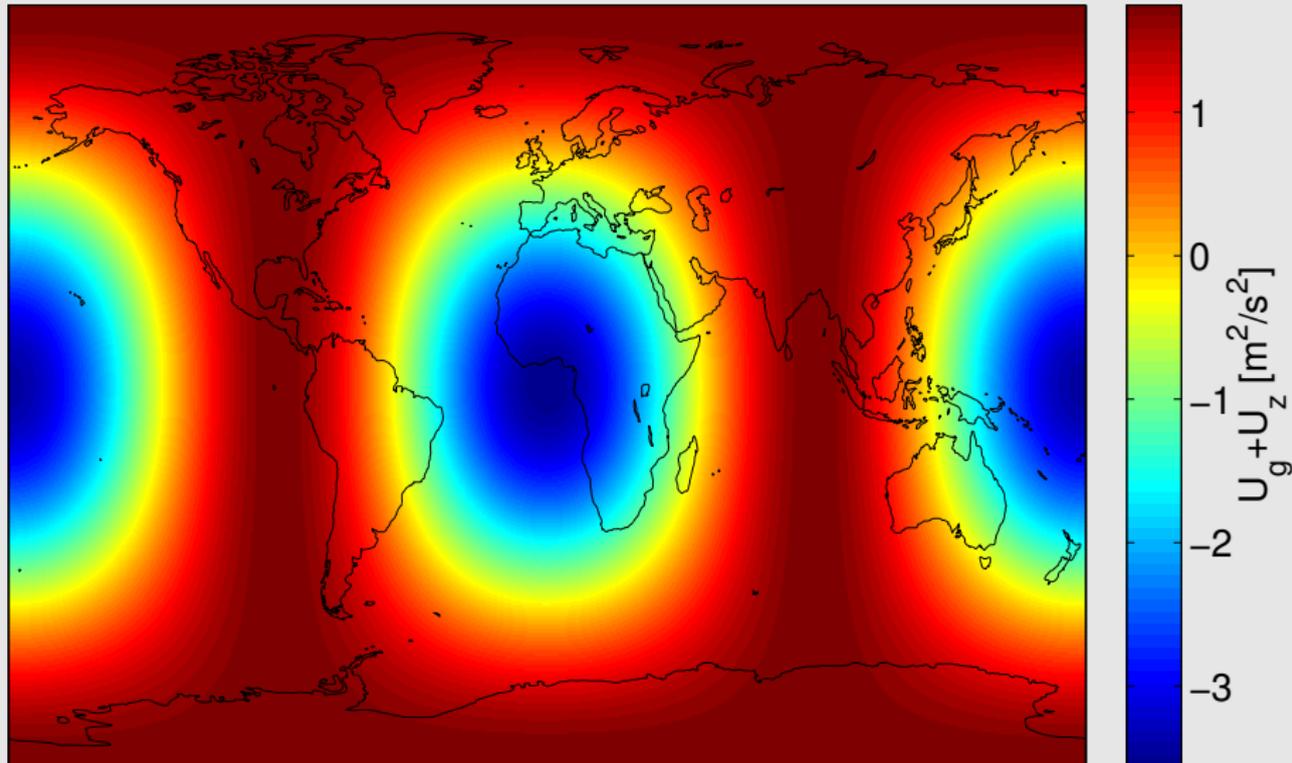
Gravitationspotential des Mondes wenn Mond über $\lambda = 0^\circ$, $\phi = 0^\circ$



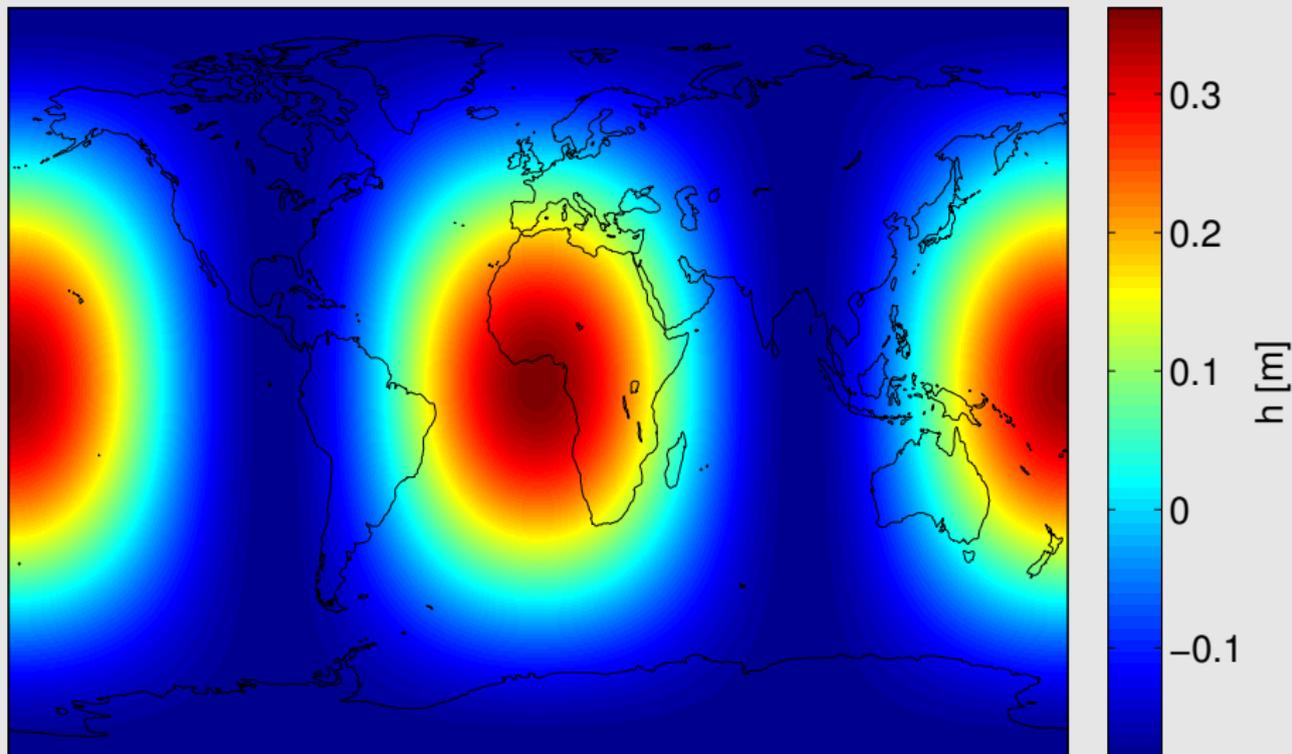
Zentrifugalpotential des Mondes wenn Mond über $\lambda = 0^\circ$, $\phi = 0^\circ$



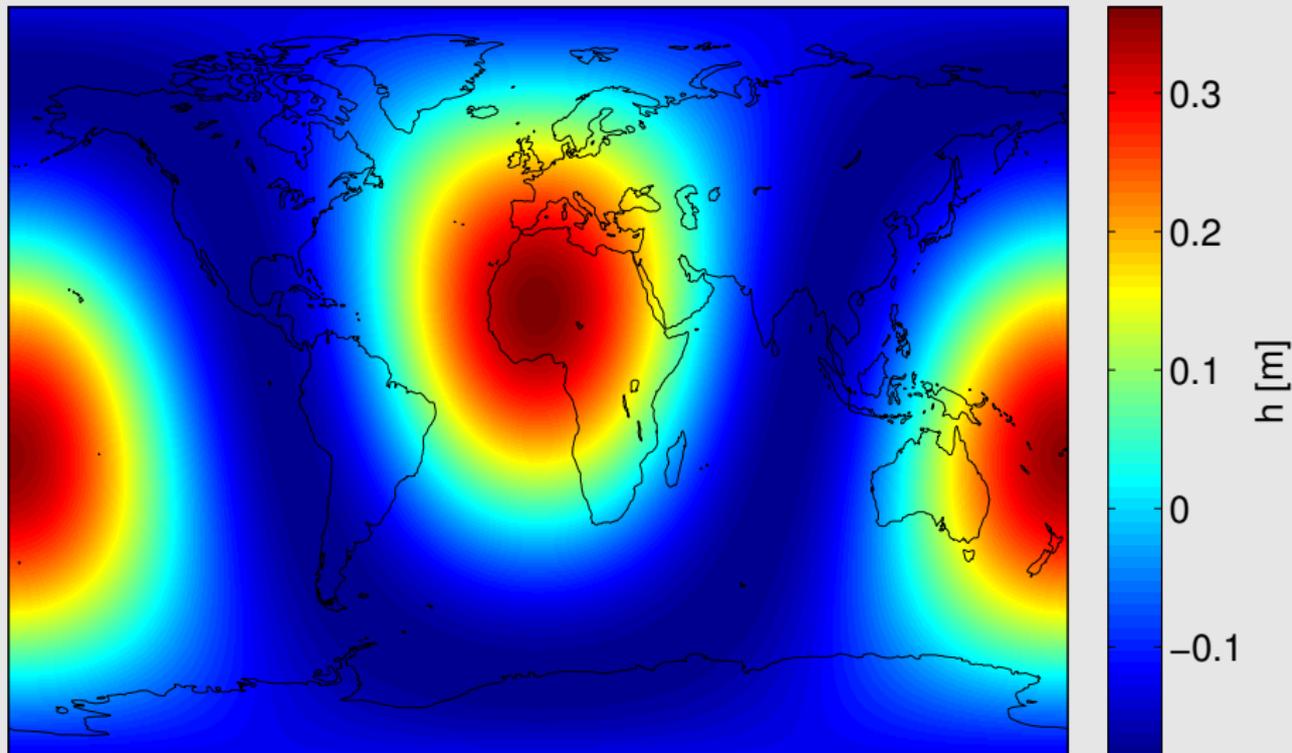
Gesamtpotential des Mondes wenn Mond über $\lambda = 0^\circ$, $\phi = 0^\circ$



Höhenänderung der Äquipotentialfl. wenn Mond über $\lambda = 0^\circ$, $\phi = 0^\circ$



Höhenänderung der Äquipotentialfl. wenn Mond über $\lambda = 0^\circ$, $\phi = 18^\circ$



Höhenänderung der Äquipotentialflächen durch den Mond

- Überwiegend Halbtagesgezeiten mit einer Periode $T = 12.42$ h.
- Amplitude (Minimum zu Maximum) bis zu 53 cm.
- Die beiden Ebбетäler eines Tages sind etwa gleich, die beiden Flutberge teils deutlich verschieden.
- In der Nähe der Pole Tagesgezeiten.

Höhenänderung der Äquipotentialflächen durch die Sonne

Alles wie bei Mond, außer

- Periode der Halbtagesgezeiten $T = 12$ h
- Amplitude (Minimum zu Maximum) nur bis zu 25 cm
- Neigung der Bahn gegenüber dem Äquator 23.5° statt 18°

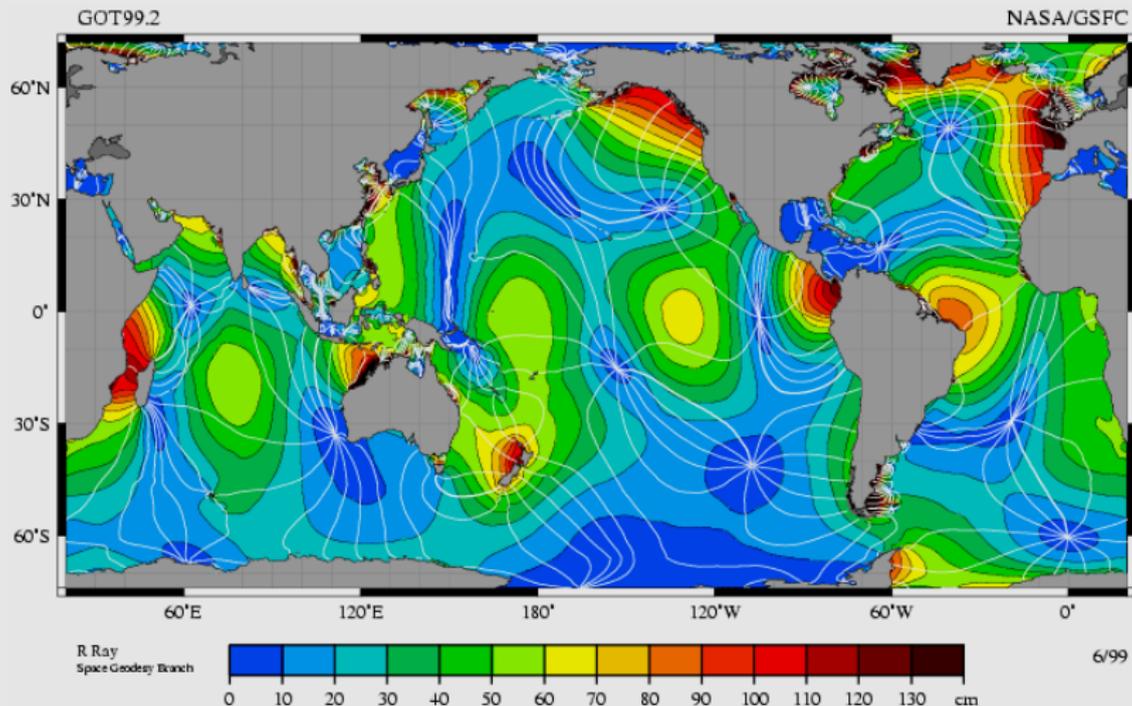
Warum folgen die Ozeane nicht den Äquipotentialflächen?

- Würde am Äquator eine Ausbreitungsgeschwindigkeit von Ozeanwellen von $v \approx 450 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ erfordern und damit eine Wassertiefe von ca. 20 km.
- Begrenzung der Ozeane durch Kontinente



Kompliziertes Muster von Amplituden

Amplituden der Gezeiten



Quelle: NASA – Scientific Visualization Studio

Die Coriolis-Beschleunigung

Betrachte Bewegung entlang der Erdoberfläche in lokalem Koordinatensystem ($x_1 = \text{Ost}$, $x_2 = \text{Nord}$, $x_3 = \text{aufwärts}$),

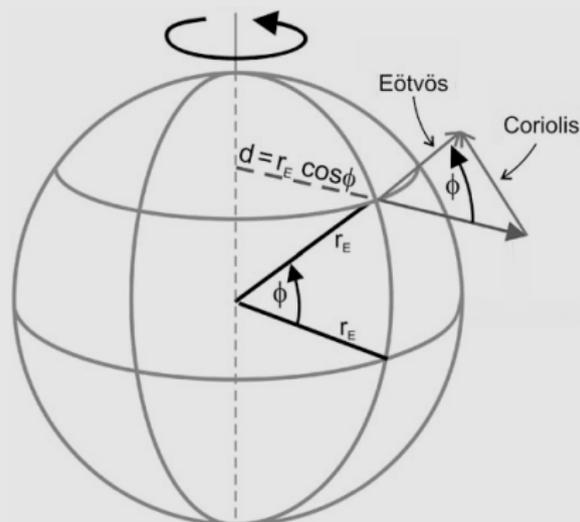
$$\vec{v} = \dot{\vec{\xi}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \cos \phi_{\text{geog}} \\ \omega \sin \phi_{\text{geog}} \end{pmatrix}$$



$$\vec{g}_c = 2\vec{v} \times \vec{\omega} = 2\omega \begin{pmatrix} v_2 \sin \phi_{\text{geog}} \\ -v_1 \sin \phi_{\text{geog}} \\ v_1 \cos \phi_{\text{geog}} \end{pmatrix}$$

Die Coriolis-Beschleunigung

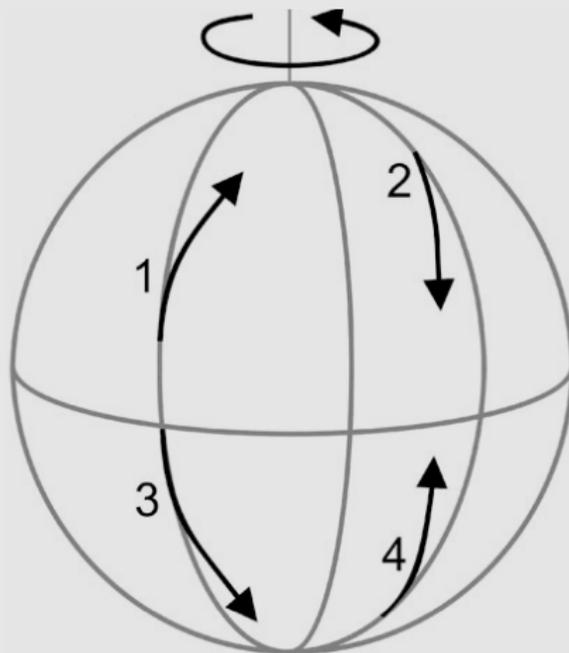
- Wenn \vec{v} eine Komponente in Ost-West-Richtung hat, besitzt \vec{g}_c eine vertikale Komponente $2\omega v_1 \cos \phi_{\text{geog}}$.
- Die vertikale Komponente von \vec{g}_c wirkt sich auf die gemessene Schwere aus und muss bei Messungen auf Schiffen oder in Flugzeugen berücksichtigt werden.
- Der Effekt ist benannt nach Loránd Eötvös (1848–1919).



Quelle: Clauser, Einführung in die Geophysik

Die Coriolis-Beschleunigung

- Horizontale Komponente der Coriolis-Beschleunigung führt zu einer Ablenkung nach rechts auf der Nordhalbkugel und nach links auf der Südhalbkugel.
- Effekt ist unabhängig von der Bewegungsrichtung auf der Erdoberfläche.
- Führt zu eindeutiger Drehrichtung von Hoch- und Tiefdruckgebieten (je nach Halbkugel unterschiedlich) und zu einer bevorzugten Drehrichtung von Wirbelstürmen.



Der Strudel im Abfluss der Badewanne



Quelle: Wikipedia



Quelle: Planet Schule

Der Strudel im Abfluss der Badewanne

Verfolge Wasserpartikel bei stationärer Strömung:

$$x_1(t) = r(t) \cos \varphi(t)$$

$$x_2(t) = r(t) \sin \varphi(t)$$

Winkelgeschwindigkeit:

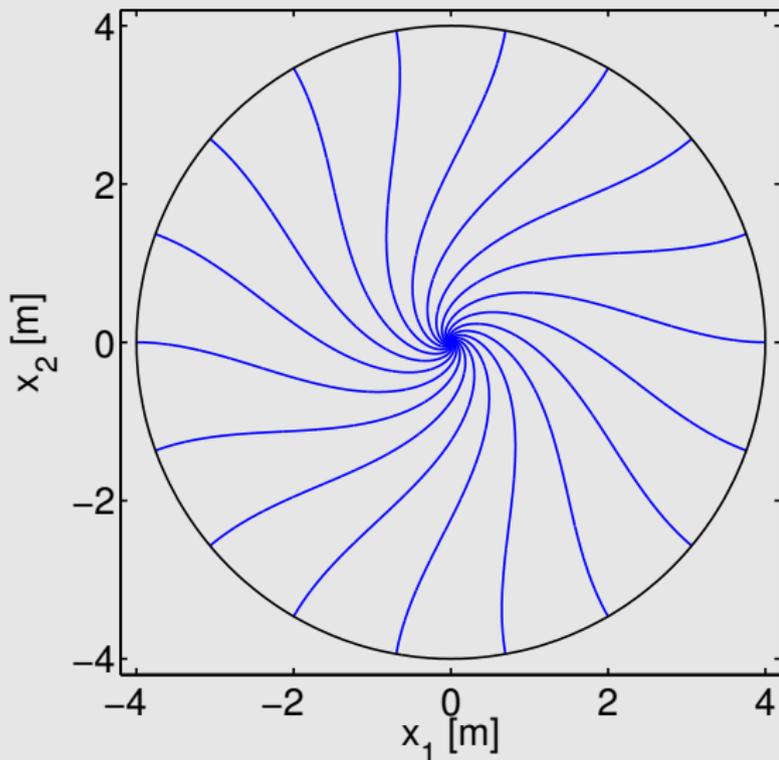
$$\omega(t) = \dot{\varphi}(t)$$

Beispiel rechts:

$$\phi_{\text{geog}} = 45^\circ$$

$$\text{Fließrate } q = 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$\text{Wassertiefe } h = 0.1 \text{ m}$$



Der Strudel im Abfluss der Badewanne

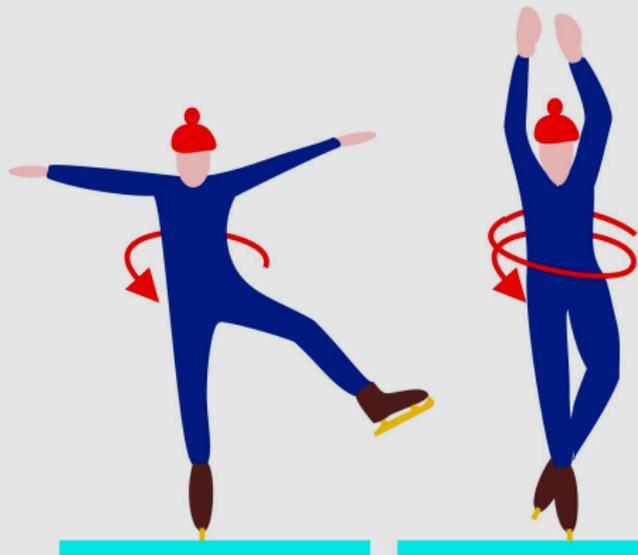
Drehimpulserhaltung ohne Berücksichtigung der Erdrotation:

$$r(t)^2 \omega(t) = \text{const}$$



$$\omega(t) \sim \frac{1}{r(t)^2}$$

nimmt zum Zentrum hin stark zu.



Quelle: Leifi Physik

Der Strudel im Abfluss der Badewanne

Drehimpulserhaltung mit Berücksichtigung der Erdrotation:

$$r(t)^2 (\omega(t) + \omega_e \sin \phi_{\text{geog}}) = \text{const}$$



$$\omega(t) + \omega_e \sin \phi_{\text{geog}} \sim \frac{1}{r(t)^2}$$

mit $\omega_e = 7.292115 \times 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ = Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation



Die Erdrotation hat nur einen Einfluss auf den Drehsinn des Strudels, wenn die Eigendrehung weit außen kleiner als die Erdrotation ist, also

$$|\omega| < \omega_e |\sin \phi_{\text{geog}}|$$

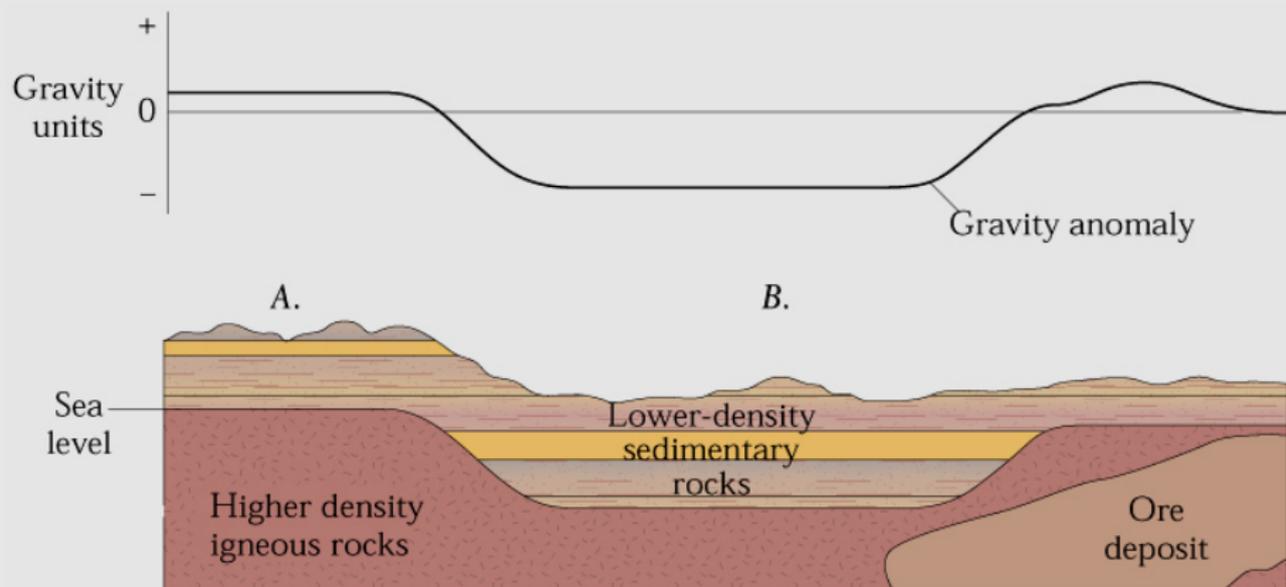
Der Strudel im Abfluss der Badewanne



Bei kleinen Wasserbehältern genügt eine minimale Asymmetrie in der Form oder eine kleine Bewegung des Wassers, um den durch die Erdrotation vorgegebenen Drehsinn zu stören.

Ziel

Bestimmung der Massenverteilung im Untergrund



Copyright 1999 John Wiley and Sons, Inc. All rights reserved.

Herausforderung

Schweredifferenz zwischen Pol und Äquator

$$g_c - g_a \approx -0.05 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 5 \times 10^{-3} g,$$

und lokale Variationen in der Schwere sind viel geringer.



Hohe Anforderung an die Messgenauigkeit

Absolute Schweremessungen

Schwerebeschleunigung wird direkt aus Längen und Zeiten bestimmt.

Schwingungsdauer eines Pendels, z. B. das im Physik-Praktikum behandelte Reversionspendel (H. Kater, J. G. F. von Bohnenberger); relative Genauigkeit bis zu 10^{-6} ($10 \frac{\mu\text{m}}{\text{s}^2} = 1 \text{ mGal}$) schon im 19. Jahrhundert

Fallexperimente seit den 1950er Jahren mit relativen Genauigkeiten von bis zu 10^{-8} ($0.1 \frac{\mu\text{m}}{\text{s}^2} = 10 \mu\text{Gal}$).

Bahndaten von Satelliten, grundsätzlich seit den 1960er Jahren; heute relative Genauigkeiten von bis zum 10^{-13} ($10^{-12} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer, GOCE), allerdings mit mäßiger räumlicher Auflösung

Relative Schweremessungen

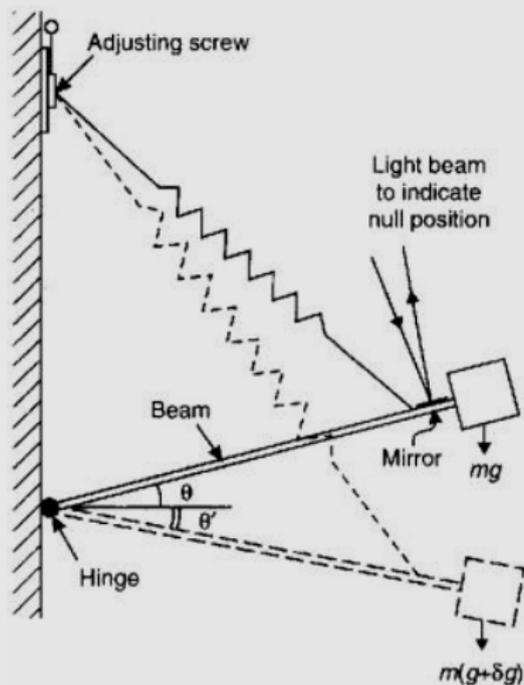
- Gravimeter nach dem Prinzip der (viel zu ungenauen) Federwaage
- Federkonstante muss ziemlich genau bekannt sein.



Kalibrierung notwendig

- Am häufigsten verwendet: Gravimeter nach S. Worden (relative Genauigkeit ca. 10^{-8}) und LaCoste-Romberg-Gravimeter (relative Genauigkeit ca. 10^{-9})

Prinzip des astasierten LaCoste-Romberg-Gravimeters



Source: National University of Malaysia

Korrekturen des Schwerefelds

Um aus Schweremessungen Rückschlüsse auf die Massenverteilung im Untergrund zu ziehen, müssen zuerst die Einflüsse, welche nichts mit der Massenverteilung zu tun haben, korrigiert werden:

- Breitengrad
- Höhe über dem Referenzellipsoid
- „Sichtbare“ Massen (Gebirge, . . .)
- Zeitabhängige Einflüsse (Gezeiten)

Die Normalschwereformel

Ziel: Schwerebeschleunigung als Funktion der geographischen Breite auf einem perfekten Ellipsoid.

Grundlage: Formel von C. Somigliana (1860–1955) für die Schwere auf einem rotierenden Ellipsoid, bei dem die Oberfläche eine Äquipotentialfläche ist:

$$g_0(\phi_{\text{geog}}) = \frac{a g_a \cos^2 \phi_{\text{geog}} + c g_c \sin^2 \phi_{\text{geog}}}{\sqrt{a^2 \cos^2 \phi_{\text{geog}} + c^2 \sin^2 \phi_{\text{geog}}}}$$

Parameterwerte nach dem GRS80

$$a = 6\,378\,137 \text{ m}$$

$$c = 6\,356\,752.3141 \text{ m}$$

$$g_a = 9.7803267715 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$g_c = 9.8321863685 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Die Normalschwereformel

Versionen: ältere Werte der Parameter und Näherungsformeln, die ohne Computer leichter zu berechnen waren.

Die Breitenkorrektur

Die Subtraktion der Normalschwere für den jeweiligen Breitengrad von der gemessenen Schwere wird als Breitenkorrektur bezeichnet.

Die Höhenkorrektur (Freiluftkorrektur)

Gravitation für eine radialsymmetrische Kugel:

$$g(r) = \frac{G m_e}{r^2}$$



Abnahme mit der Höhe:

$$\frac{\partial}{\partial r} g(r) = -2 \frac{G m_e}{r^3} = -\frac{2}{r} g(r) = -3.0828 \times 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = -0.30828 \frac{\text{mGal}}{\text{m}}$$

an der Erdoberfläche.

Die nach der Breitenkorrektur und der Reduktion auf das Referenzellipsoid ($h = 0$) verbleibende Schwereanomalie wird als **Freiluftanomalie** bezeichnet.

Die Höhenkorrektur (Freiluftkorrektur)

Bessere Näherung auf Basis der Werte des GRS80:

$$g(\phi_{\text{geog}}, h) = g_0(\phi_{\text{geog}}) (1 - (k_1 - k_2 \sin^2 \phi_{\text{geog}}) h + k_3 h^2)$$

mit

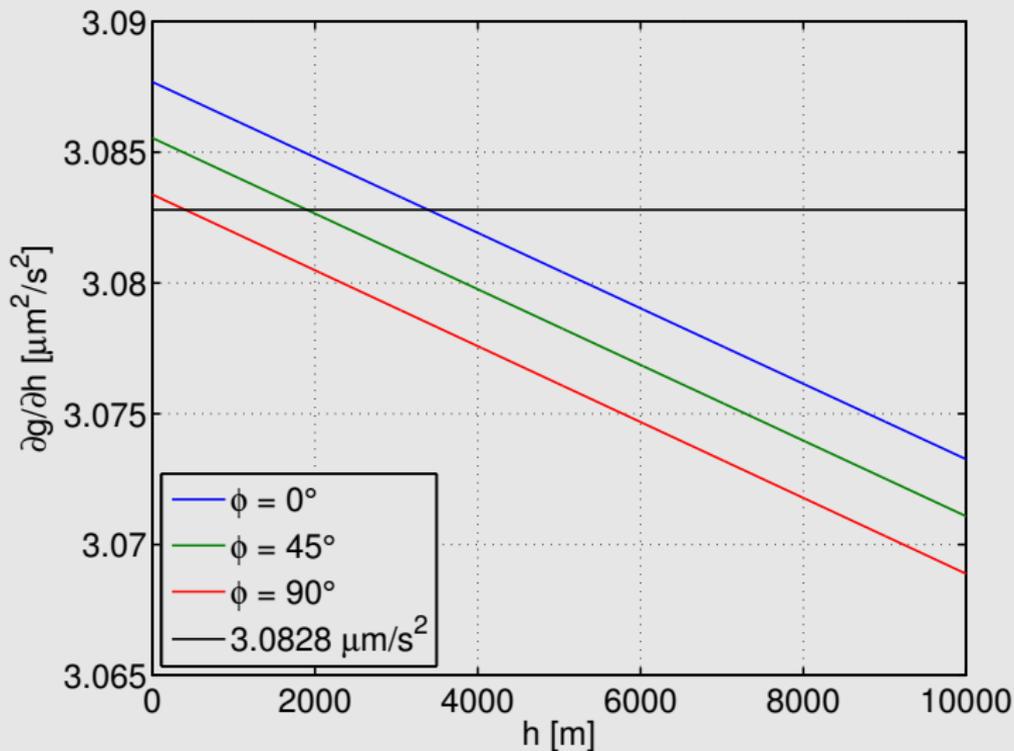
h = Höhe über dem Referenzellipsoid

$$k_1 = 3.15704 \times 10^{-7} \text{ m}^{-1}$$

$$k_2 = 2.10269 \times 10^{-9} \text{ m}^{-1}$$

$$k_3 = 7.37452 \times 10^{-14} \text{ m}^{-2}$$

Die Höhenkorrektur (Freiluftkorrektur)



Die topographische Korrektur

Schwerebeschleunigung der Masse zwischen Topographie und Referenzellipsoid wird subtrahiert.

Heutzutage numerisch kein großes Problem.

Die Bouguer-Korrektur

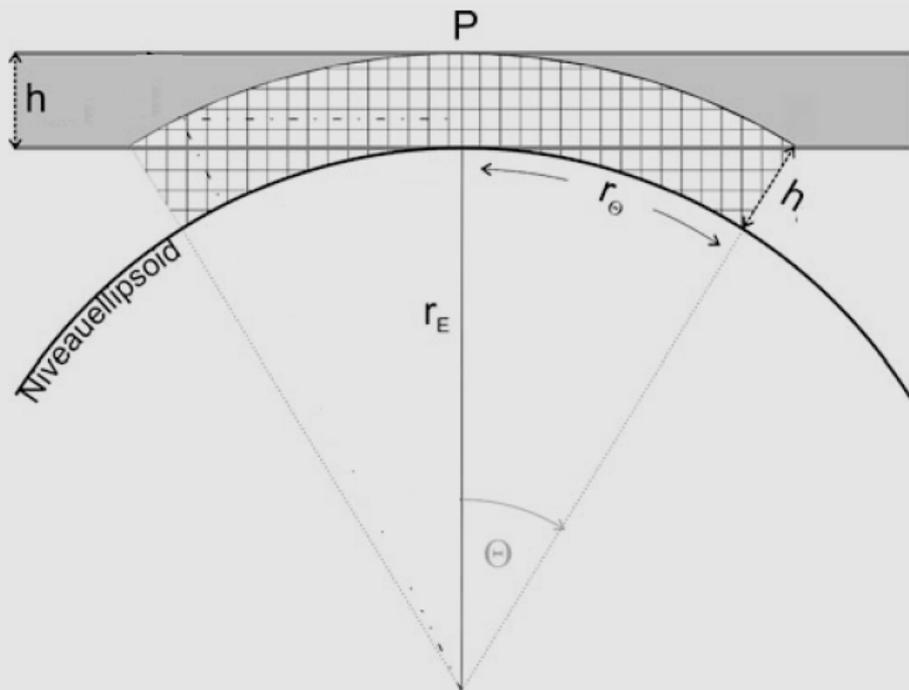
- Einfachste Version der topographischen Korrektur
- Benannt nach P. Bouguer (1698–1758)
- Beruht auf der Gravitation einer unendlich ausgedehnten Platte der Mächtigkeit h tangential an die Erdoberfläche

$$\delta g_B = 2\pi G \rho h \quad \text{mit} \quad 2\pi G \rho = 1.1197 \times 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

für $\rho = 2670 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

- Positiver Effekt der zusätzlichen Masse ist nur etwa $\frac{1}{3}$ des negativen Effekts der Höhe.

Die Bouguer-Korrektur



Quelle: Clauser, Einführung in die Geophysik

Die Bouguer-Korrektur

Bessere Näherung: Teil einer Kugelschale der Mächtigkeit h mit halbem Öffnungswinkel θ :

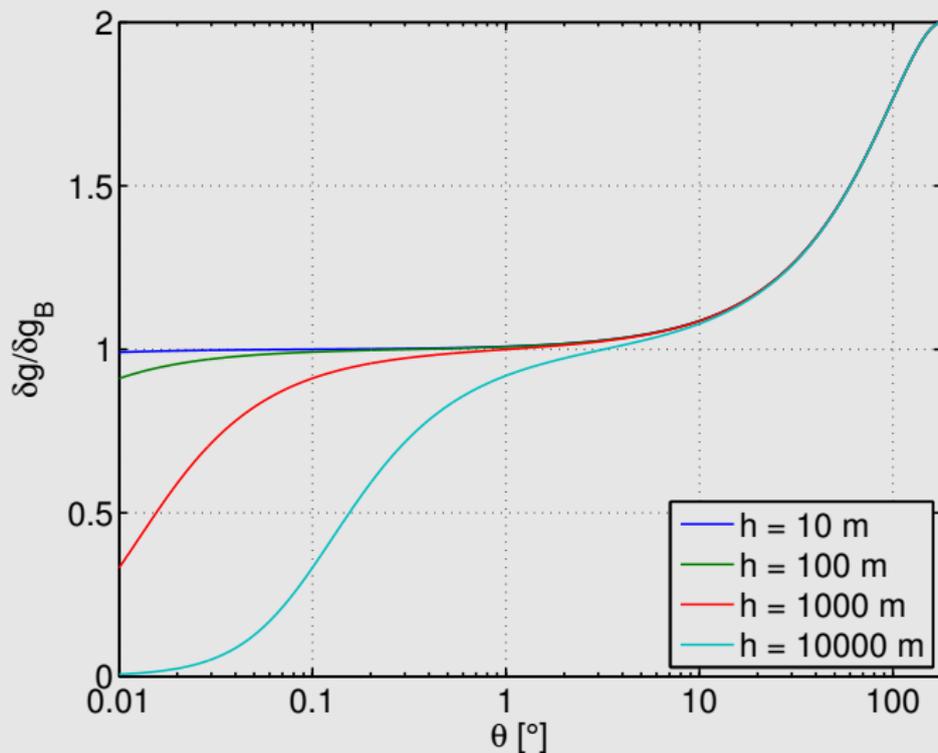
$$\delta g = \delta g_B \left(1 - \frac{(r+h) \cos \theta - r}{\sqrt{(r+h)^2 + r^2 - 2(r+h)r \cos \theta}} \right)$$

für $h \ll r$.

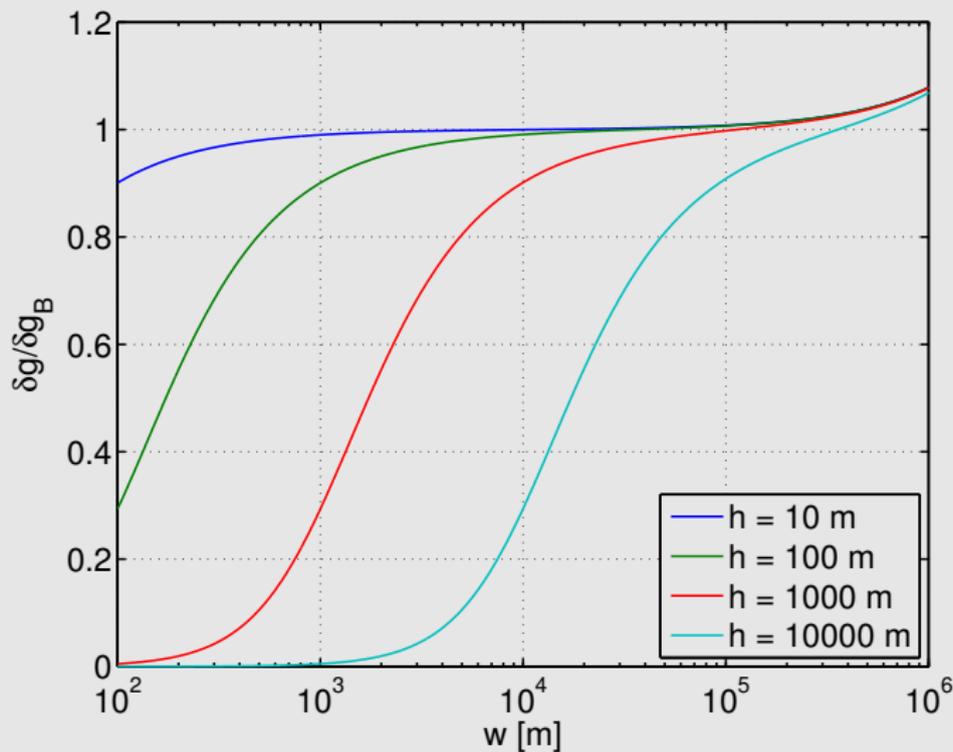
„Durchmesser“

$$w = 2r\theta \quad (\theta \text{ in rad})$$

Die Bouguer-Korrektur



Die Bouguer-Korrektur



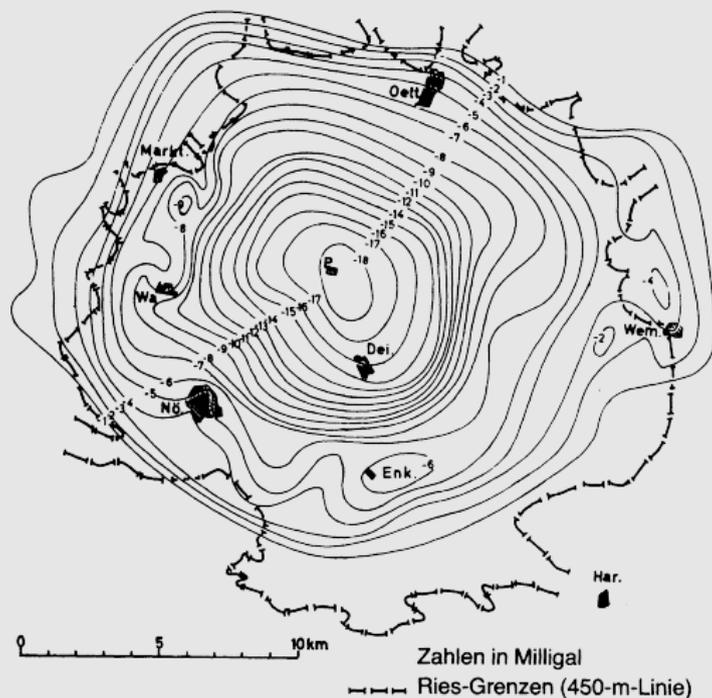
Die Bouguer-Korrektur

- Einfache Bouguer-Korrektur ist recht gut, wenn $h \ll w$ (flache Topographie) und w nicht zu groß ist.
- Etwa 10 % Abweichung bei $\frac{h}{w} = 0.1$.
- Volle Kugelschale ($\theta = 180^\circ$):

$$\delta g = 4\pi G\rho h = 2\delta g_B$$

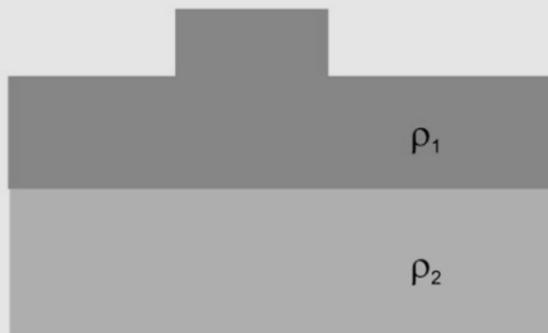
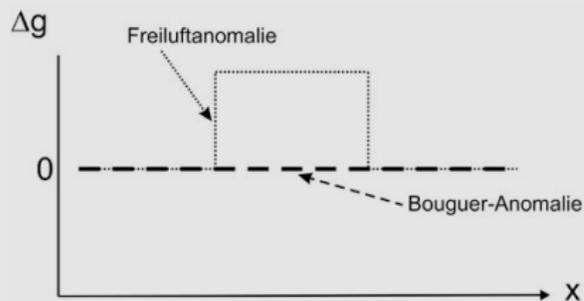
- Die nach der Breitenkorrektur, der Höhenkorrektur auf das Referenzellipsoid (Freiluft) und der Bouguer-Korrektur verbleibende Schwereanomalie wird als **Bouguer-Anomalie** bezeichnet.

Beispiel: Bouguer-Anomalie im Nördlinger Ries

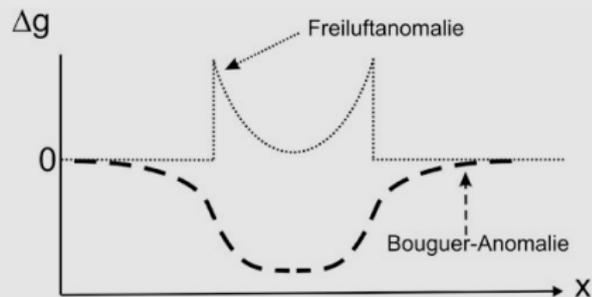


Quelle: Berckheimer, Geophysik

Schwereanomalien und Isostasie



$$\rho_1 < \rho_2$$



$$\rho_1 < \rho_2$$

Quelle: Clauser, Einführung in die Geophysik

Typische Dichten in der Kruste

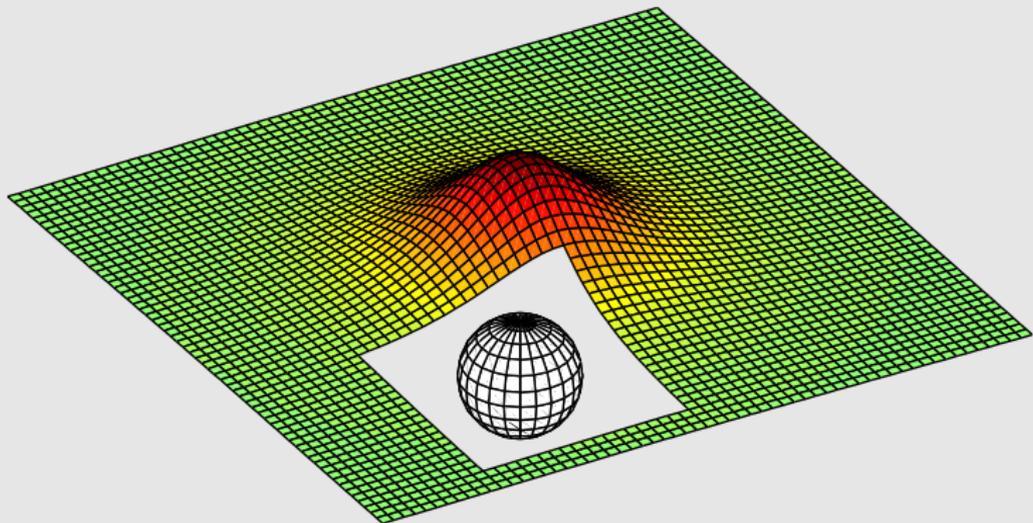
Material	ρ [$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$]
Sand	1300–2000
Sandstein	2000–2400
Halit	2200

Material	ρ [$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$]
Granit	2500–2700
Basalt	2900–3100
Erze	4000–8000



Speziell große Erzvorkommen und mächtige Sedimente lassen sich mittels Schweremessungen gut kartieren.

Homogene Kugel im Untergrund



- Einfachste Modellvorstellung einer Schwereanomalie
- Brauchbare Näherung, wenn die Tiefe deutlich größer als die Ausdehnung ist.

Homogene Kugel im Untergrund

Zusätzliches Gravitationsfeld entspricht mit dem einer Punktmasse

$$\delta m = \frac{4\pi}{3} r^3 \delta \rho$$

mit $\delta \rho =$ Dichteunterschied zur Umgebung (kann negativ sein):

$$\delta \vec{g}(\vec{x}) = - \frac{G \delta m}{|\vec{x} - \vec{a}|^2} \frac{\vec{x} - \vec{a}}{|\vec{x} - \vec{a}|}$$

mit $\vec{a} =$ Mittelpunkt der Kugel.

Messung von Schwereanomalien

Schwereanomalie ist aber nicht $|\delta\vec{g}(\vec{x})|$, sondern nur die vertikale Komponente von $\delta\vec{g}(\vec{x})$.

Betrachte irgendein Schwerfeld $\vec{g}(\vec{x}, p)$, welches von einem zusätzlichen Parameter p abhängt.



$$\frac{\partial}{\partial p} |\vec{g}(\vec{x}, p)| = \frac{\partial}{\partial p} \sqrt{\vec{g} \cdot \vec{g}} = \frac{2\vec{g} \cdot \frac{\partial}{\partial p} \vec{g}}{2\sqrt{\vec{g} \cdot \vec{g}}} = \frac{\vec{g} \cdot \frac{\partial}{\partial p} \vec{g}}{|\vec{g}|} = \hat{g} \cdot \frac{\partial}{\partial p} \vec{g}$$

mit \hat{g} = Einheitsvektor in Richtung von \vec{g} .



Nur die Komponente von $\delta\vec{g}$ in Richtung von \vec{g} wirkt sich auf die gemessene Schwere $|\vec{g}|$ aus, nicht die Komponente senkrecht zu \vec{g} .

Homogene Kugel im Untergrund

Komponente in Richtung von \vec{g} :

$$\delta g(\vec{x}) = \delta \vec{g}(\vec{x}) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = - \frac{G \delta m}{|\vec{x} - \vec{a}|^2} \frac{\vec{x} - \vec{a}}{|\vec{x} - \vec{a}|} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Für Punkte an der Erdoberfläche:

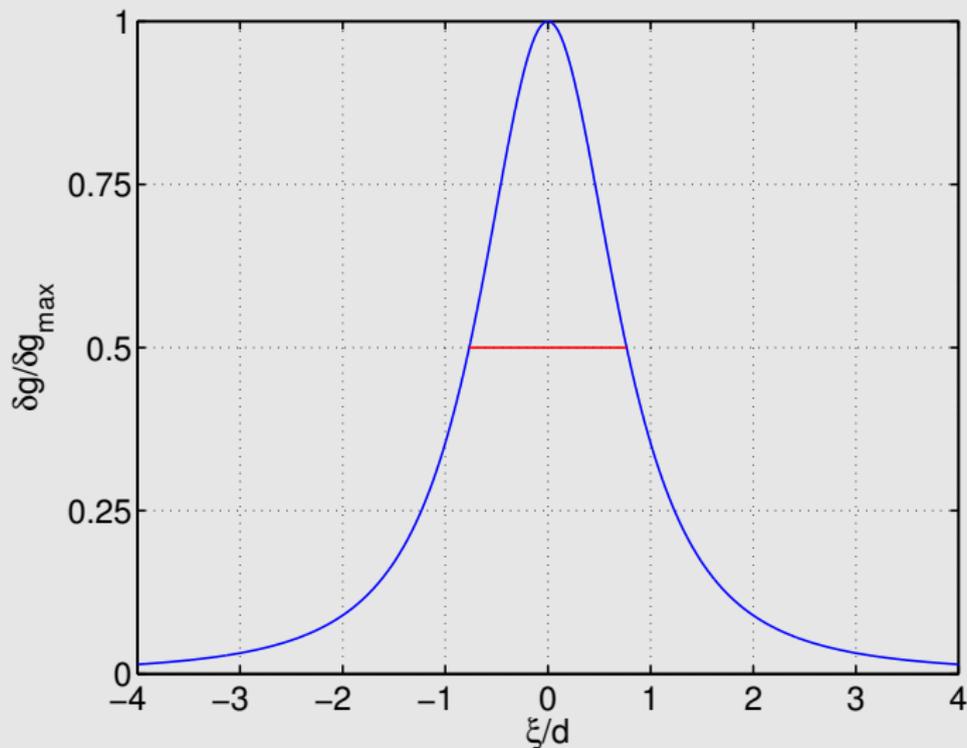
$$\delta g(x_1, x_2, 0) = - \frac{G \delta m a_3}{\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + d^2}^3} = \frac{G \delta m d}{\sqrt{\xi^2 + d^2}^3}$$

mit

$$\xi = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} = \text{horizontaler Abstand}$$

$$d = -a_3 = \text{Tiefe}$$

Homogene Kugel im Untergrund



Homogene Kugel im Untergrund

- Maximale Schwereanomalie vertikal über dem Mittelpunkt $r = 0$:

$$\delta g_{\max} = \frac{G \delta m}{d^2}$$

- Halbwertsbreite (Full Width at Half Maximum, FWHM):

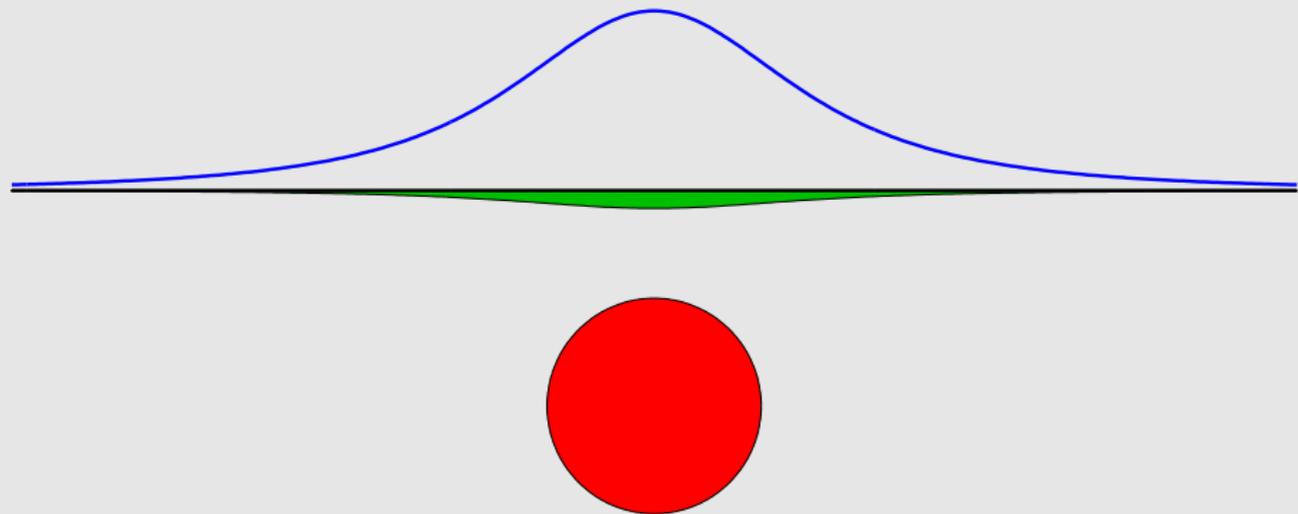
$$w = 2\sqrt{2^{\frac{2}{3}} - 1} d \approx \frac{3}{2} d$$



$$d \approx \frac{2}{3} w \quad \text{und} \quad \delta m = \frac{d^2 \delta g_{\max}}{G}$$

Uneindeutigkeit von Schweremessungen

Kugel vs. Bouguer-Platte mit identischer Schwereanomalie an der Erdoberfläche



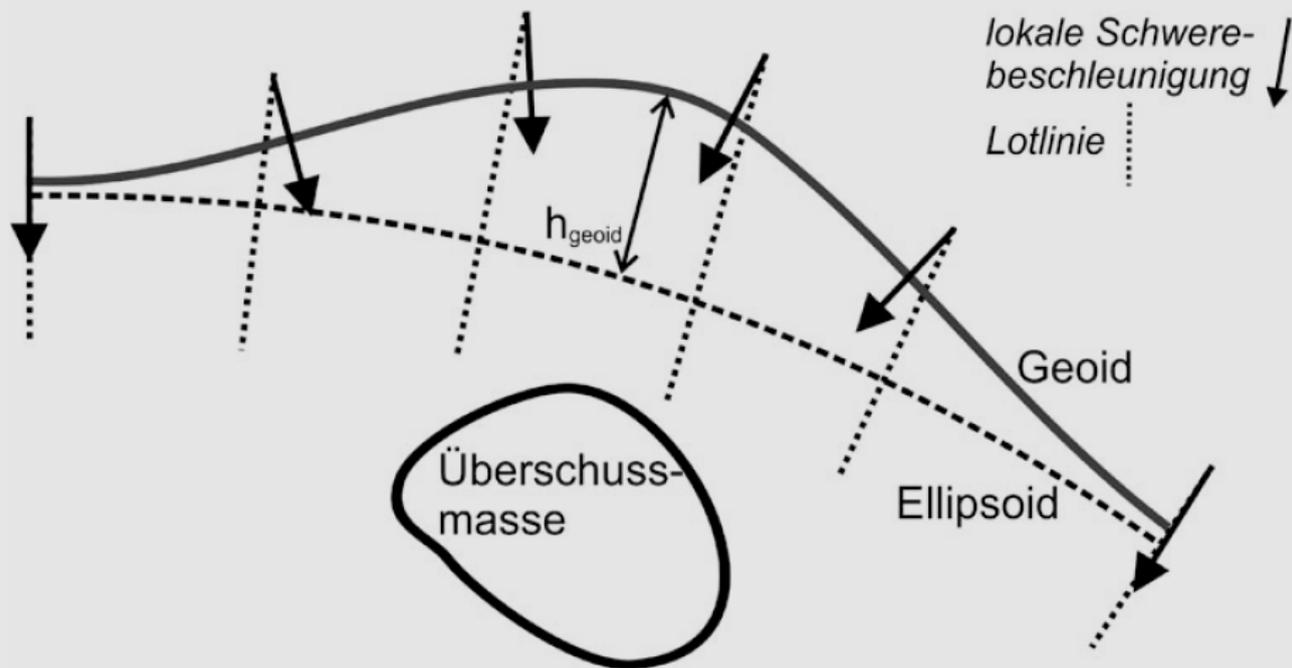
Uneindeutigkeit von Schweremessungen

- Kugel und entsprechende Bouguer-Platte haben sogar dasselbe Volumen.
- Grundsätzlich lässt sich die Schwereanomalie einer beliebigen Massenverteilung durch unendlich viele andere Massenverteilungen (in geringerer Tiefe) erzeugen.



Schweremessungen erlauben keine eindeutige Rekonstruktion der Massenverteilung im Untergrund.

Einfluss von Massenüberschüssen und -defiziten auf das Geoid



Quelle: Clauser, Einführung in die Geophysik

Einfluss von Massenüberschüssen und -defiziten auf das Geoid

Angenommen, das Schwerepotential hängt von einem zusätzlichen Parameter p ab: $U(\vec{x}, p)$. Suche einen Weg $\vec{x}(p)$, sodass $U(\vec{x}(p), p) = \text{const.}$



$$\frac{d}{dp} U(\vec{x}(p), p) = 0$$

Nach Kettenregel:

$$\frac{d}{dp} U(\vec{x}(p), p) = \nabla U \cdot \frac{d\vec{x}}{dp} + \frac{\partial U}{\partial p} = -\vec{g} \cdot \frac{d\vec{x}}{dp} + \frac{\partial U}{\partial p}$$



$$\vec{g} \cdot \frac{d\vec{x}}{dp} = \frac{\partial U}{\partial p}$$

Einfluss von Massenüberschüssen und -defiziten auf das Geoid

bzw. mit einer kleinen Potentialänderung δU

$$\vec{g} \cdot \delta \vec{x} = \delta U \quad \rightarrow \quad \hat{g} \cdot \delta \vec{x} = \frac{\delta U}{g}$$



Äquipotentialflächen (also auch das Geoid) verschieben sich um $\frac{\delta U}{g}$ in Richtung der Schwere bzw. um

$$\delta h = - \frac{\delta U}{g}$$

“nach oben“.

Einfluss von Massenüberschüssen und -defiziten auf das Geoid

Für einen kugelförmigen Massenüberschuss bzw.- defizit δm am Ort \vec{a} :

$$\delta U(\vec{x}) = - \frac{G\delta m}{|\vec{x} - \vec{a}|}$$

An der Erdoberfläche:

$$\delta U(x_1, x_2, 0) = - \frac{G\delta m}{\sqrt{\xi^2 + d^2}}$$

mit

$$\begin{aligned}\xi &= \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} = \text{horizontaler Abstand} \\ d &= -a_3 = \text{Tiefe}\end{aligned}$$

Einfluss von Massenüberschüssen und -defiziten auf das Geoid

Anhebung des Geoids um

$$\delta h = -\frac{\delta U}{g} = \frac{G\delta m}{g\sqrt{\xi^2 + d^2}} = \frac{\delta g}{g} \frac{\xi^2 + d^2}{d}$$



- Anomalie im Geoid ist breiter als Schwereanomalie
- Anomalie im Geoid wächst mit der Tiefe d im Vergleich zur Schwereanomalie



Schwereanomalie zeigt eher die seichtere Struktur des Erdinneren,
Geoidhöhe eher die tiefere Struktur.

Kugelflächenfunktionen

Betrachte stetige Funktionen $f(\phi, \lambda)$ auf einer Kugeloberfläche.

- Bilden (wie alle Funktionen) einen Vektorraum.
- Dimension ist unendlich.
- (Orthonormal-)Basis?

Begriffe der Orthogonalität und Normierung erfordern zuerst ein Skalarprodukt, z. B. durch Integration über die Einheitskugel:

$$f \cdot g = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi, \lambda) g(\phi, \lambda) \cos \phi \, d\lambda d\phi$$

Kugelflächenfunktionen

Alternative Definition:

$$f \cdot g = \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi, \lambda) g(\phi, \lambda) \cos \phi d\lambda d\phi$$

- Hat den Vorteil, dass $f(\phi, \lambda) = 1$ die Norm

$$\|f\| = \sqrt{f \cdot f} = \sqrt{\frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \phi d\lambda d\phi} = 1$$

hat.

- Wird beim Schwerefeld verwendet.

Kugelflächenfunktionen

Das Finden einer Basis ist ein Problem wegen unendlicher Dimension. Es lässt sich aber ein vollständiges Orthonormalsystem aus Funktionen

$$\begin{array}{cccccc} & & & Y_{0,0}(\phi, \lambda) & & \\ & & & & & \\ & & Y_{1,-1}(\phi, \lambda) & Y_{1,0}(\phi, \lambda) & Y_{1,1}(\phi, \lambda) & \\ Y_{2,-2}(\phi, \lambda) & Y_{2,-1}(\phi, \lambda) & Y_{2,0}(\phi, \lambda) & Y_{2,1}(\phi, \lambda) & Y_{2,2}(\phi, \lambda) & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

finden, sodass

$$Y_{lm} \cdot Y_{\tilde{l}\tilde{m}} = \begin{cases} 1 & \text{für } l = \tilde{l} \text{ und } m = \tilde{m} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$\left\| \sum_{l=0}^n \sum_{m=-l}^l (f \cdot Y_{lm}) Y_{lm} - f \right\| \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

Kugelflächenfunktionen

l heißt Grad, m Ordnung der Kugelflächenfunktion $Y_{lm}(\phi, \lambda)$.

Grad $l = 0$:

$$Y_{0,0}(\phi, \lambda) = 1$$

Alle anderen $Y_{lm}(\phi, \lambda)$ stehen senkrecht auf $Y_{0,0}(\phi, \lambda)$

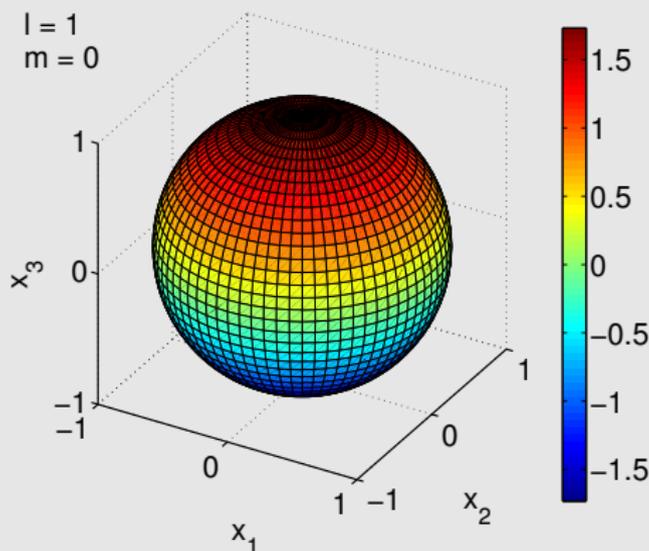


Alle anderen $Y_{lm}(\phi, \lambda)$ haben Mittelwert 0.

Kugelflächenfunktionen

Grad $l = 1$, Ordnung $m = 0$ (zonal):

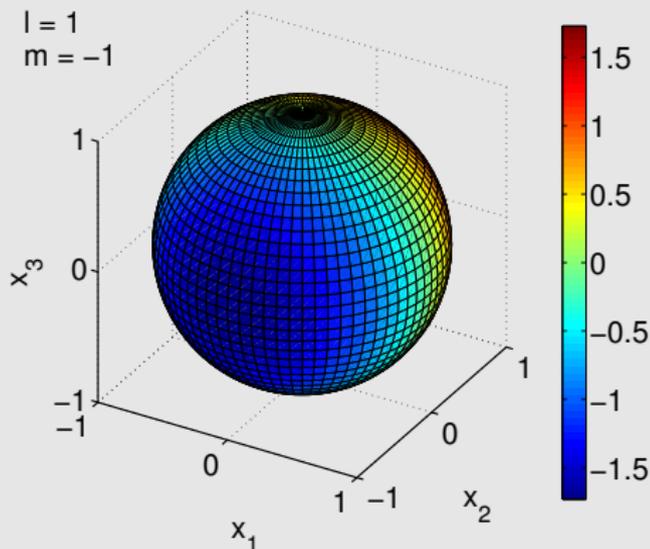
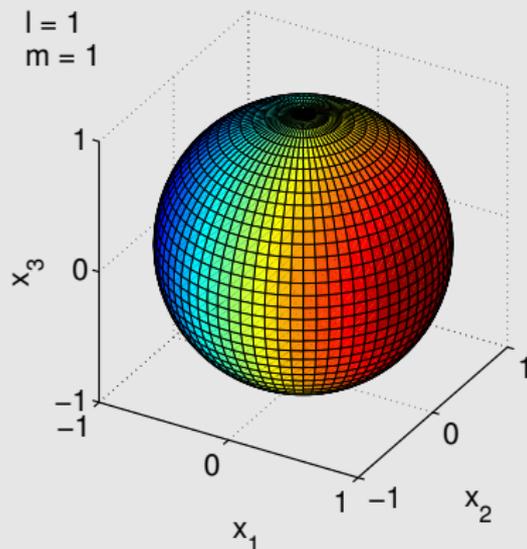
$$Y_{1,0}(\phi, \lambda) = \sqrt{3} \sin \phi$$



Kugelflächenfunktionen

Grad $l = 1$, Ordnung $m = \pm 1$ (sektoriell):

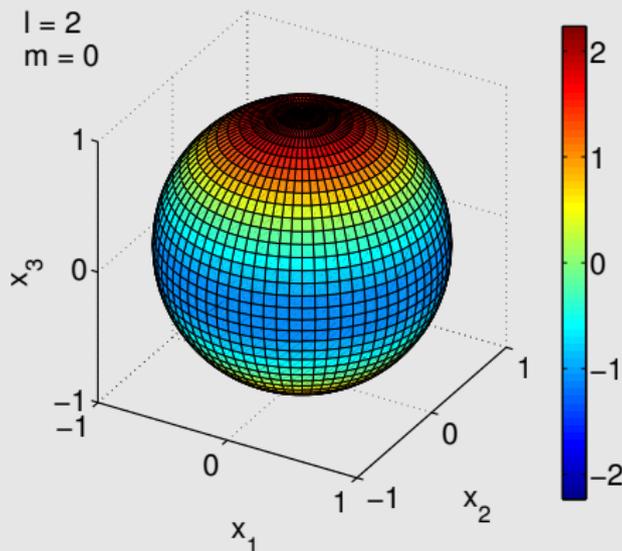
$$Y_{1,1}(\phi, \lambda) = \sqrt{3} \cos \phi \cos \lambda \quad Y_{1,-1}(\phi, \lambda) = \sqrt{3} \cos \phi \sin \lambda$$



Kugelflächenfunktionen

Grad $l = 2$, Ordnung $m = 0$ (zonal):

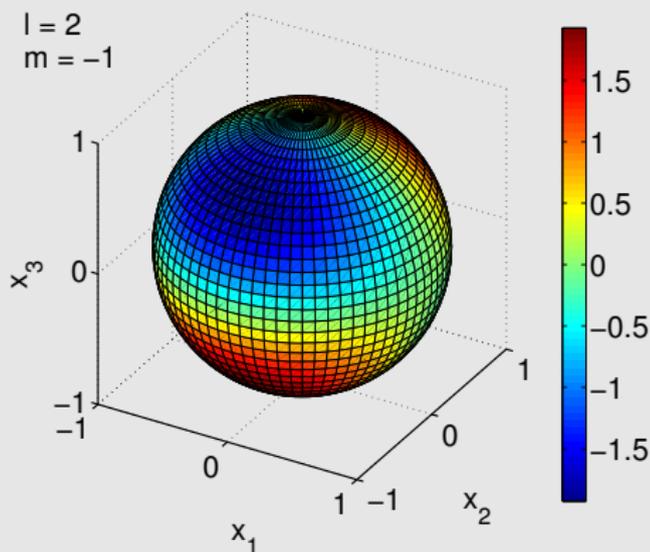
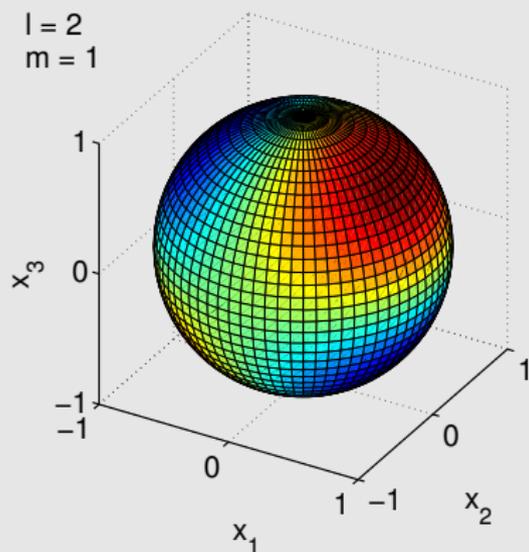
$$Y_{2,0}(\phi, \lambda) = \sqrt{\frac{5}{4}} (3 \sin^2 \phi - 1)$$



Kugelflächenfunktionen

Grad $l = 2$, Ordnung $m = \pm 1$ (tesseral):

$$Y_{2,1}(\phi, \lambda) = \sqrt{15} \sin \phi \cos \phi \cos \lambda \quad Y_{2,-1}(\phi, \lambda) = \sqrt{15} \sin \phi \cos \phi \sin \lambda$$

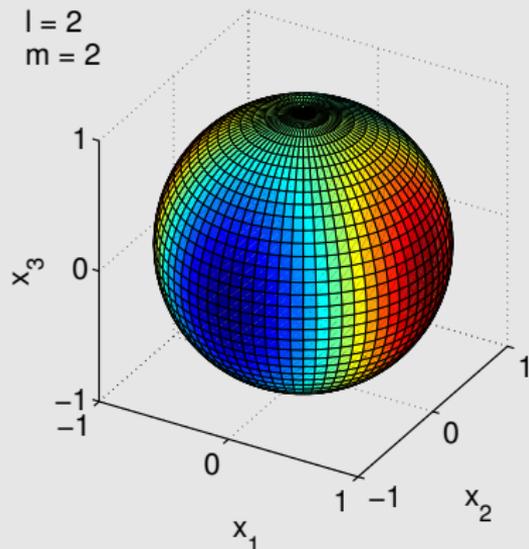


Kugelflächenfunktionen

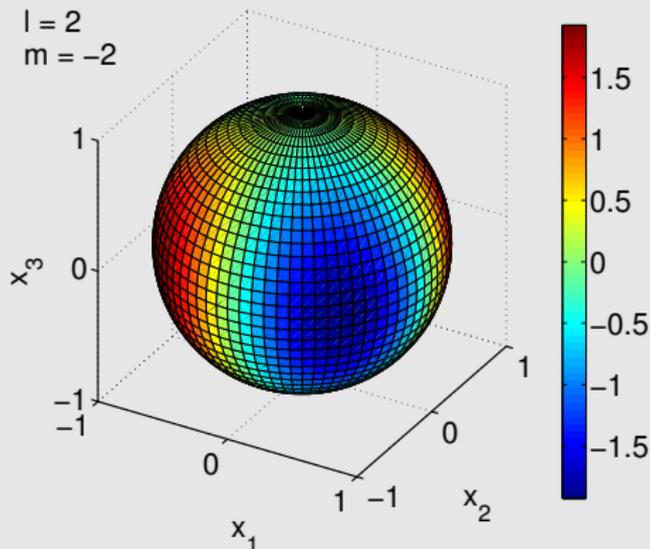
Grad $l = 2$, Ordnung $m = \pm 2$ (sektoriell):

$$Y_{2,2}(\phi, \lambda) = \sqrt{\frac{15}{4}} \cos^2 \phi \cos(2\lambda) \quad Y_{2,-2}(\phi, \lambda) = \sqrt{\frac{15}{4}} \cos^2 \phi \sin(2\lambda)$$

$l = 2$
 $m = 2$



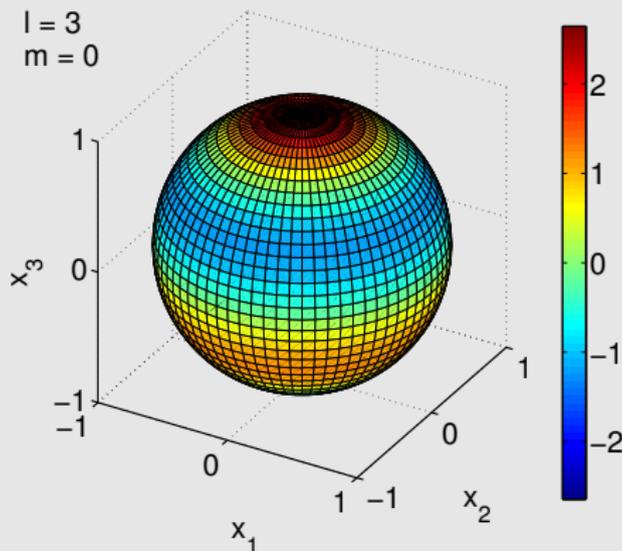
$l = 2$
 $m = -2$



Kugelflächenfunktionen

Grad $l = 3$, Ordnung $m = 0$ (zonal):

$$Y_{3,0}(\phi, \lambda) = \sqrt{\frac{7}{4}} \sin \phi (5 \sin^2 \phi - 3)$$

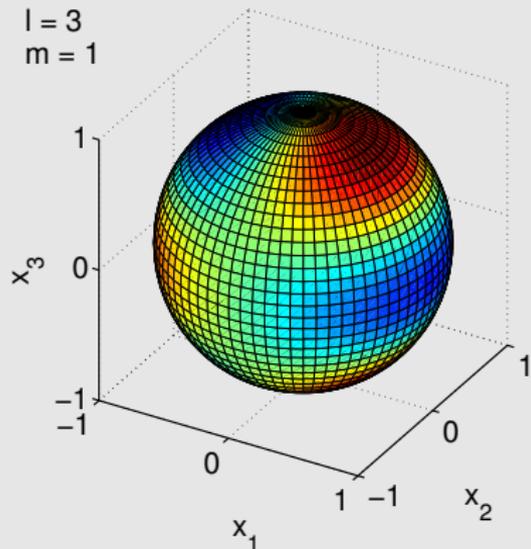


Kugelflächenfunktionen

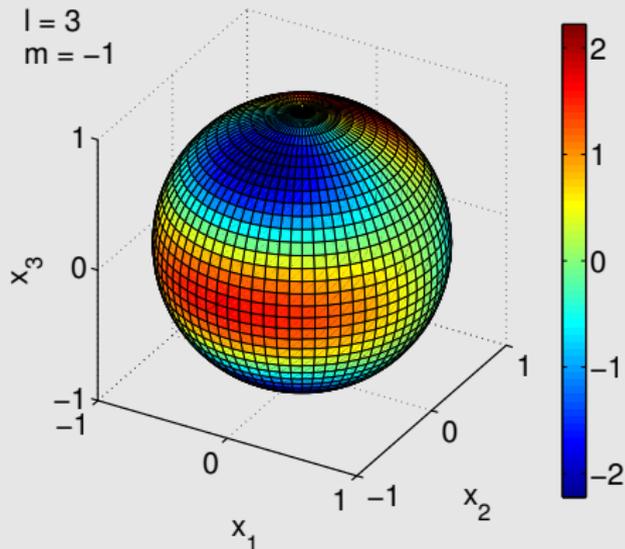
Grad $l = 3$, Ordnung $m = \pm 1$ (tesseral):

$$Y_{3,1}(\phi, \lambda) = \sqrt{\frac{21}{8}} \cos \phi (5 \sin^2 \phi - 1) \cos \lambda \quad Y_{3,-1}(\phi, \lambda) = \dots \sin \lambda$$

$l = 3$
 $m = 1$



$l = 3$
 $m = -1$

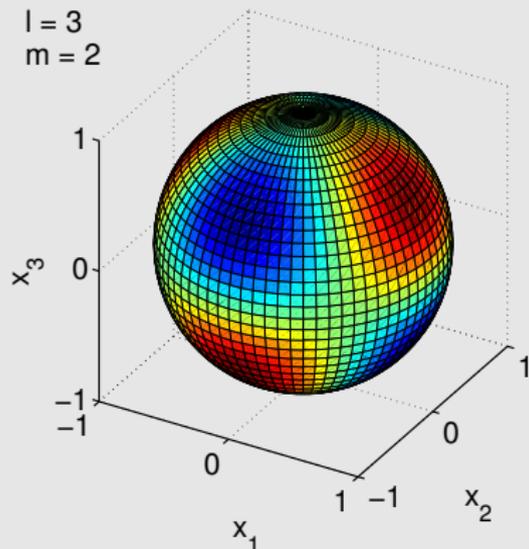


Kugelflächenfunktionen

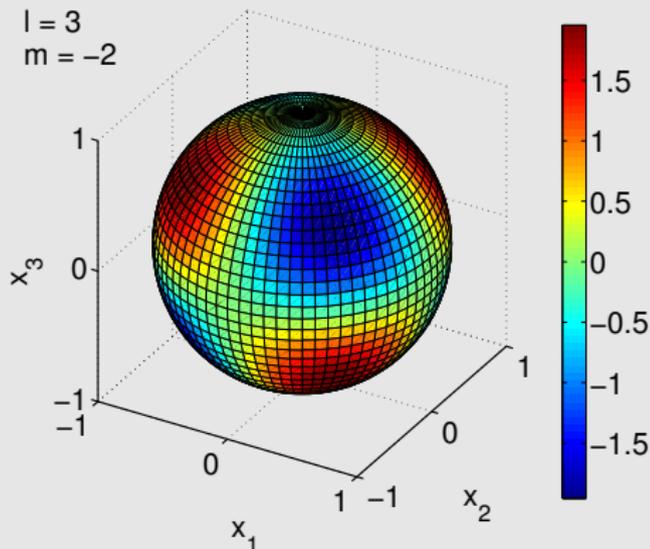
Grad $l = 3$, Ordnung $m = \pm 2$ (tesseral):

$$Y_{3,2}(\phi, \lambda) = \sqrt{\frac{105}{4}} \sin \phi \cos^2 \phi \cos(2\lambda) \quad Y_{3,-2}(\phi, \lambda) = \dots \sin(2\lambda)$$

$l = 3$
 $m = 2$



$l = 3$
 $m = -2$

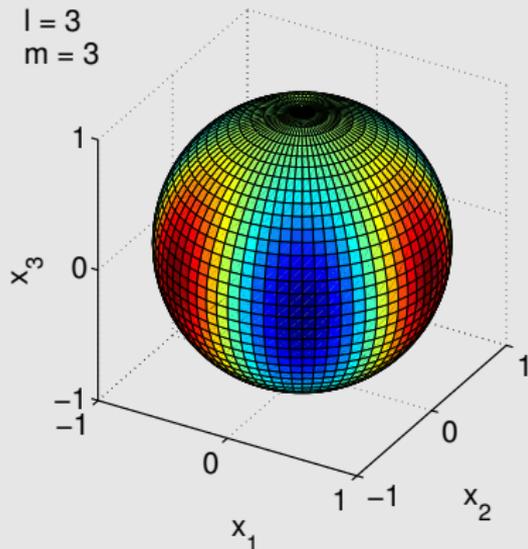


Kugelflächenfunktionen

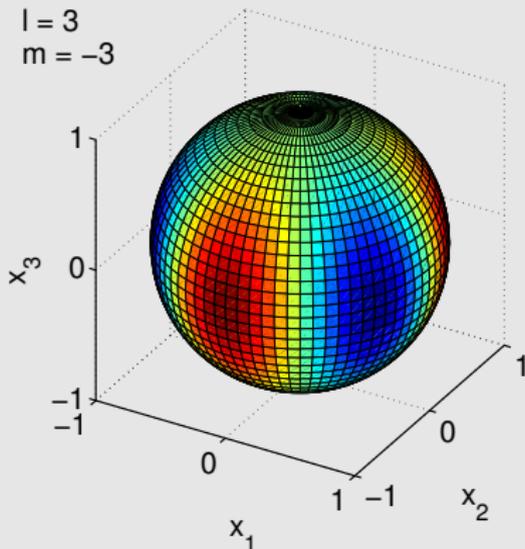
Grad $l = 3$, Ordnung $m = \pm 3$ (sektoriell):

$$Y_{3,3}(\phi, \lambda) = \sqrt{\frac{35}{8}} \cos^3 \phi \cos(3\lambda) \quad Y_{3,-3}(\phi, \lambda) = \sqrt{\frac{35}{8}} \cos^3 \phi \sin(3\lambda)$$

$l = 3$
 $m = 3$



$l = 3$
 $m = -3$



Darstellung durch Kugelflächenfunktionen

Jede Funktion $f(\phi, \lambda)$ auf einer Kugeloberfläche lässt sich als „unendliche Linearkombination“ aus Kugelflächenfunktionen darstellen:

$$f(\phi, \lambda) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\phi, \lambda) \quad \text{mit} \quad a_{lm} = \int f \cdot Y_{lm}$$



Gravitationspotential lässt sich darstellen als

$$U_g(r, \phi, \lambda) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_{lm}(r) Y_{lm}(\phi, \lambda)$$

Darstellung durch Kugelflächenfunktionen

Außerhalb der Massenverteilung (streng genommen außerhalb einer Kugel um die Massenverteilung) gilt für die Funktionen $f_{lm}(r)$:

$$f_{lm}(r) = \frac{1}{r^{l+1}}$$



Anteile der $Y_{lm}(\phi, \lambda)$ fallen unterschiedlich stark mit dem Abstand ab; am langsamsten der zu $Y_{0,0}(\phi, \lambda) = 1$ mit

$$f_{0,0}(r) = -\frac{Gm}{r}$$

Darstellung durch Kugelflächenfunktionen

Übliche Darstellung:

$$f_{lm}(r) = \begin{cases} -\frac{Gm}{r} \left(\frac{a}{r}\right)^l C_{lm} & \text{für } m \geq 0 \quad (\text{Terme mit } \cos(m\lambda)) \\ -\frac{Gm}{r} \left(\frac{a}{r}\right)^l S_{lm} & \text{für } m < 0 \quad (\text{Terme mit } \sin(m\lambda)) \end{cases}$$

mit $a = \text{Äquatorradius}$



$$U_g(r, \phi, \lambda) = -\frac{Gm}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^l \sum_{m=0}^l (C_{lm} Y_{lm}(\phi, \lambda) + S_{lm} Y_{l,-m}(\phi, \lambda))$$

mit $S_{l0} = 0$.

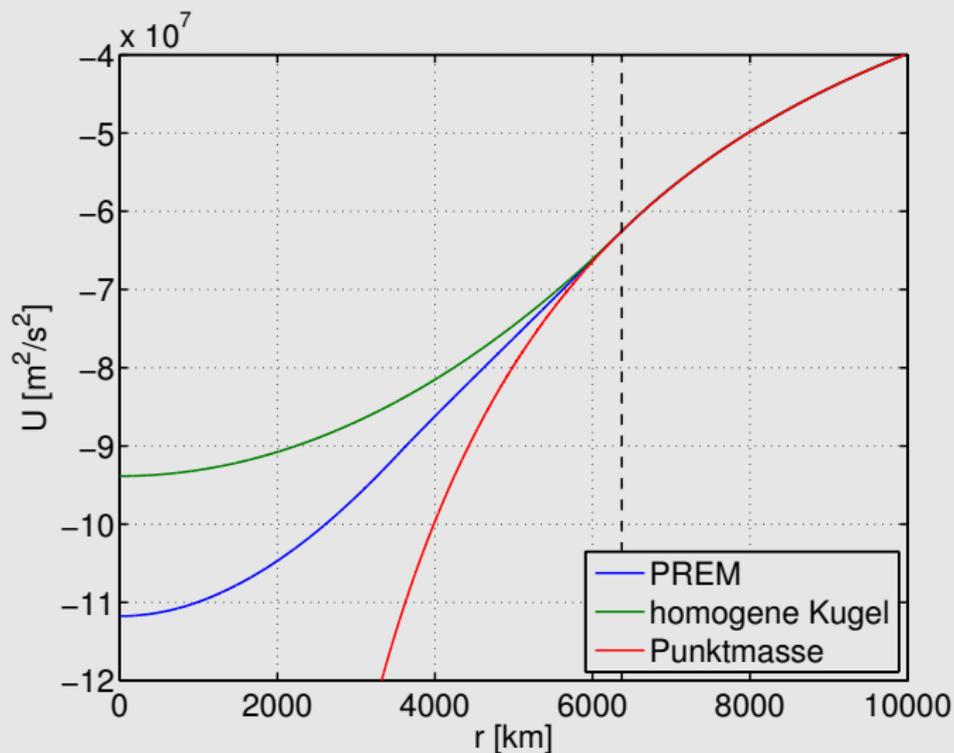
Darstellung durch Kugelflächenfunktionen

Datensätze des Gravitationsfeldes enthalten Gm , a sowie die Koeffizienten C_{lm} und S_{lm} bis zu einem bestimmten Grad n , z. B. $n = 2190$ für das Modell EIGEN-6C4.

		$C_{0,0}$		
		1		
	$C_{1,1}$	$C_{1,0}$	$S_{1,1}$	
	0	0	0	
$C_{2,2}$	$C_{2,1}$	$C_{2,0}$	$S_{2,1}$	$S_{2,2}$
2.4×10^{-6}	-3×10^{-10}	-4.84×10^{-4}	1.4×10^{-9}	-1.4×10^{-6}

Alle weiteren Koeffizienten sind kleiner als 2.1×10^{-6} .

Das Gravitationspotential im Erdinneren



Das Gravitationspotential im Erdinneren

Verlauf der Potentials im Erdinneren hängt von der Massenverteilung ab.



Exaktes Geoid lässt sich nicht ohne Annahmen an die Dichteverteilung bestimmen, wenn es unter der Erdoberfläche liegt.

Näherungen:

- Ignorieren – einfach das Potential von außerhalb der Massenverteilung (z. B. EIGEN-6C4) in die Erdkruste fortsetzen.

Das Gravitationspotential im Erdinneren

- Potential von außerhalb der Massenverteilung in die Erdkruste fortsetzen und Bouguer-Korrektur anwenden.

Änderung der Schwere und des Potentials durch die Masse, wenn wir in einer Tiefe d unter der Erdoberfläche sind:

$$\delta g(d) = -4\pi G\rho d = -\frac{\partial}{\partial d}\delta U(d)$$



$$\delta U(d) = 2\pi G\rho d^2$$

Resultierende Verschiebung der Aquipotentialfläche nach oben:

$$\delta h = -\frac{\delta U(d)}{g} = -\frac{2\pi G\rho}{g}d^2$$

Das Gravitationspotential im Erdinneren

- Quasigeoid: Setze Potential an der Erdoberfläche mit Normalschwere fort.

Extrembeispiel:

35.40°N, 84.88°E (im Norden von Tibet)

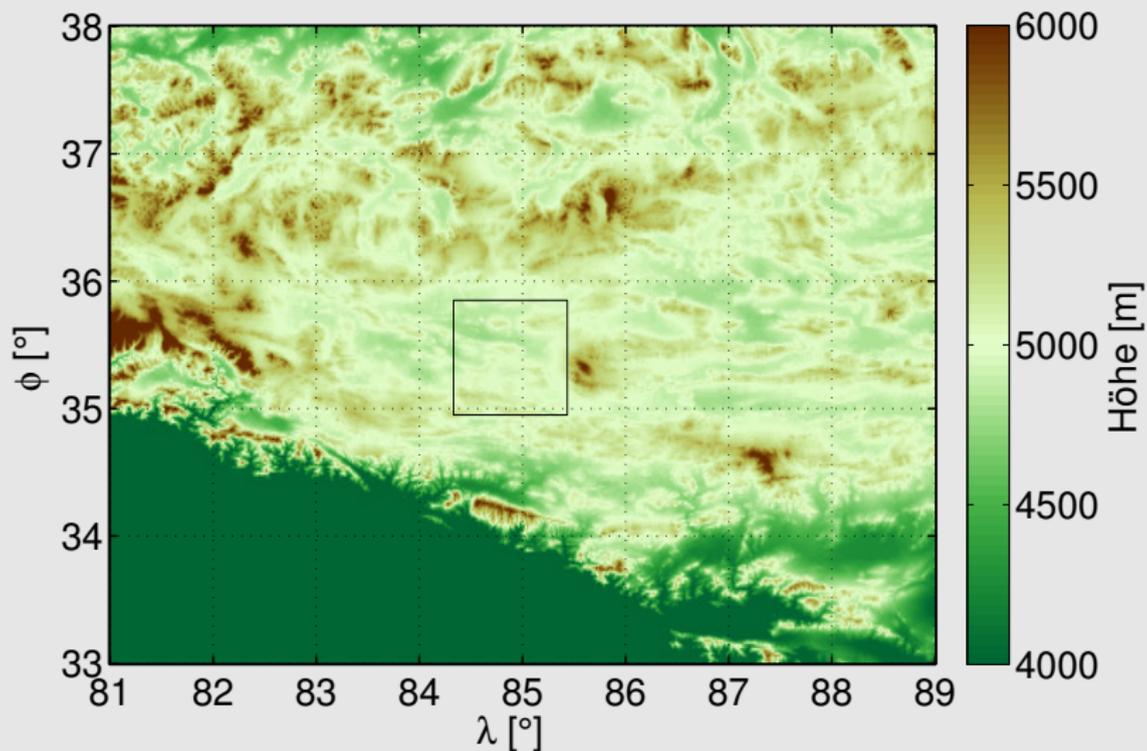
Höhe $h = 5056$ m über Geoid (EGM96, 35.5 m unter Referenzellipsoid)



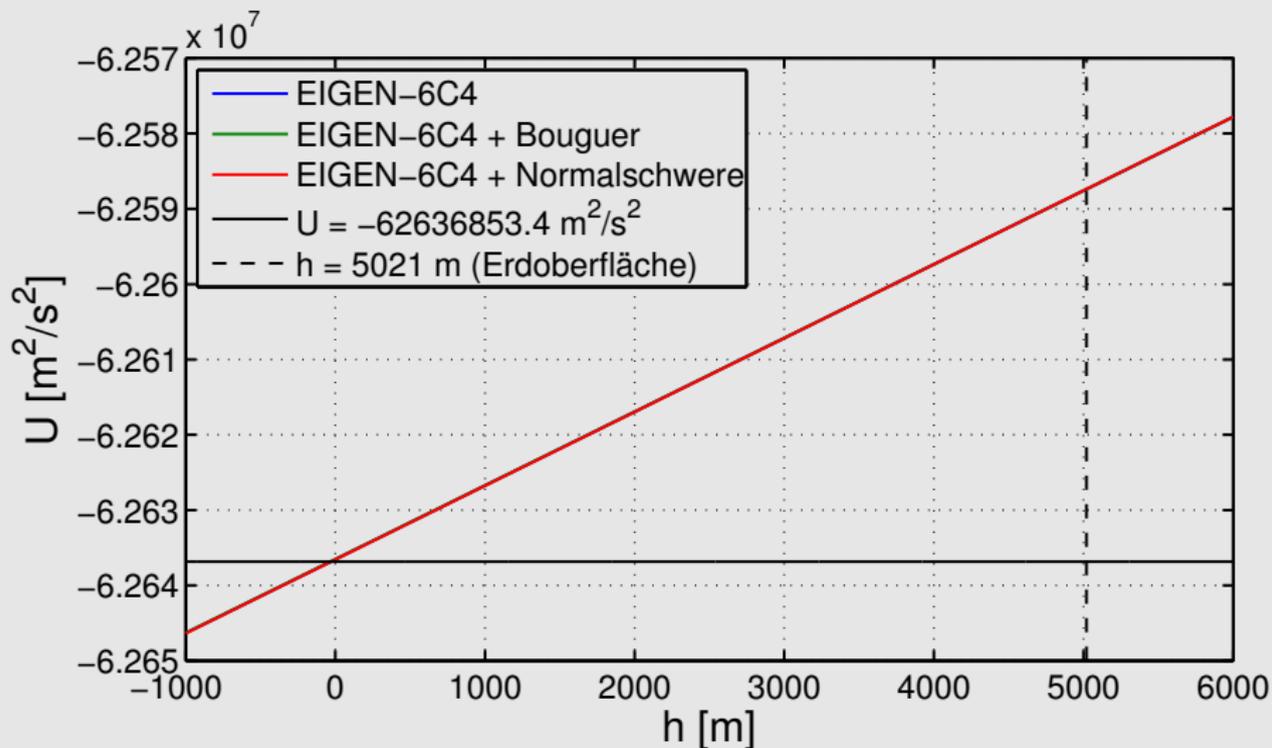
$h = 5021$ m über Referenzellipsoid

Relief in 100 km \times 100 km Quadrat unter 500 m

Das Gravitationspotential im Erdinneren



Das Gravitationspotential im Erdinneren



Das Gravitationspotential im Erdinneren

