Mathematische Grundlagen der Geowissenschaften

Definitionen und Abbildungen

Stefan Hergarten

Institut für Geo- und Umweltnaturwissenschaften
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Definition eines Vektorraums

Ein Vektorraum ist eine Menge, deren Elemente (Vektoren) sich addieren und strecken (bzw. stauchen) lassen.

Addition von Vektoren (wie die Addition von reellen Zahlen):

A1 Zu jedem Paar von Vektoren a und b gibt es einen Vektor $a + b$.

A2 $a + b = b + a$ für alle Vektoren a und b.

A3 $(a + b) + c = a + (b + c)$ für alle Vektoren a, b und c.

A4 Es gibt einen Nullvektor 0, sodass $a + 0 = a$ für alle Vektoren a.

A5 Zu jedem Vektor a gibt es einen inversen (umgekehrten) Vektor $-a$, sodass $a + (-a) = 0$.

Definition eines Vektorraums

Streckung (bzw. Stauchung) = Multiplikation von reellen Zahlen mit Vektoren (überwiegend wie die Multiplikation reeller Zahlen untereinander:

S1 Zu jeder reellen Zahl λ und zu jedem Vektor a gibt es einen Vektor λa.

S2 $1a = a$ für alle Vektoren a.

S3 $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$ für alle Zahlen λ und μ und alle Vektoren a.

Vektoraddition und Streckung „vertragen sich“:

AS1 $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$ für alle Zahlen λ und μ und alle Vektoren a.

AS2 $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$ für alle Zahlen λ und alle Vektoren a und b.

2 Längen und Abstände

Definition einer Norm

Eine Norm oder Länge (nicht Betrag) ist eine Abbildung von einem Vektorraum in die reellen Zahlen mit den Eigenschaften

N1 Für alle Vektoren a und b gilt die Dreiecksungleichung

$$||a+b|| \;\leq\; ||a|| + ||b||.$$

N2 Für alle Vektoren a und alle reellen Zahlen λ gilt

$$||\lambda a|| \;=\; |\lambda|\, ||a||.$$

N3 Nur der Nullvektor hat die Länge null, d. h. $||a|| = 0$ gilt nur, wenn $a = 0$.

Die wichtigsten Normen in $\mathbb{R}^n$

Euklidische Norm:

$$|a| \;=\; \sqrt{|a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2}$$

Manhattan-Norm:

$$||a|| \;=\; |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$

Maximumsnorm:

$$||a|| \;=\; \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|\}$$

Allgemeine p-Norm für $p \geq 1$:

$$||a|| \;=\; \sqrt[p]{|a_1|^p + \cdots + |a_n|^p}$$

Ebene Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$

$$a = r \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad r = |a| \geq 0 \quad \text{und} \quad \varphi \in [0, 2\pi[$$

Kugelkoordinaten in $\mathbb{R}^3$

$$a = r \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\lambda \\ \cos\phi\sin\lambda \\ \sin\phi \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{array}{rccl} \vartheta & \in & [0, \pi] \text{ (bzw. } [0, 180°]) & = \text{Polarwinkel} \\ \varphi & \in & [0, 2\pi[\text{ (bzw. } [0, 360°]) & = \text{Azimutwinkel} \\ \phi & \in & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ (bzw. } [-90°, 90°]) & = \text{Breitengrad} \\ \lambda & \in &]-\pi, \pi] \text{ (bzw. } [-180°, 180°]) & = \text{Längengrad} \end{array}$$

Standard-Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$

$$a \cdot b \; = \; a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

Allgemeine Definition eines Skalarprodukts

Ein Skalarprodukt ist eine Abbildung, die jedem Paar a und b von Vektoren eine Zahl $a \cdot b$ zuordnet und die folgenden Eigenschaften hat:

SP1 Für alle Vektoren a und b ist $a \cdot b = b \cdot a$.

SP2 Für alle Vektoren a, b und c gilt:

$$(a + b) \cdot c \; = \; a \cdot c + b \cdot c$$

SP3 Für alle Vektoren a und b und alle reellen Zahlen λ gilt:

$$(\lambda a) \cdot b \; = \; \lambda(a \cdot b)$$

SP4 Für alle Vektoren $a \neq 0$ ist $a \cdot a > 0$.

5 Das Vektorprodukt in $\mathbb{R}^3$

Definition des Vektorprodukts

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Die wichtigsten Eigenschaften des Vektorprodukts

VP1 Für alle Vektoren a und b ist $a \times b = -b \times a$.

VP2 Für alle Vektoren a, b und c gilt

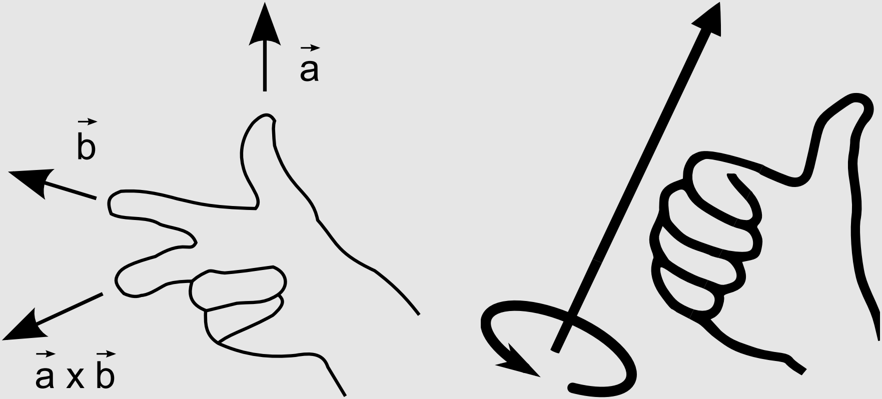
$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c$$

VP3 Für alle Vektoren a und b und alle reellen Zahlen λ gilt

$$(\lambda a) \times b = \lambda (a \times b)$$

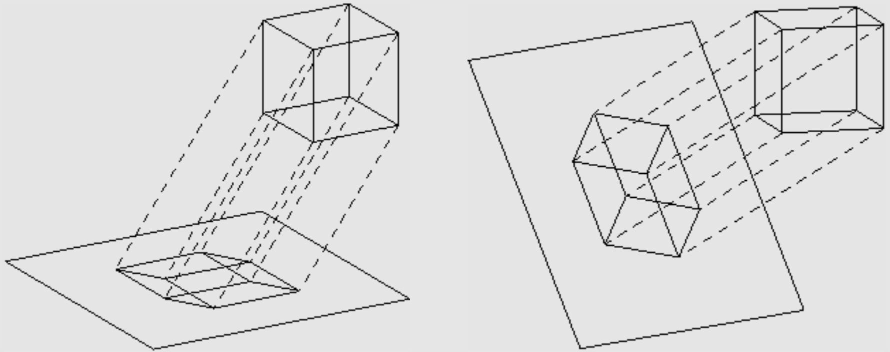
VP4 Der Vektor $a \times b$ steht senkrecht auf den Vektoren a und b.

Dreifingerregel und Rechte-Faust-Regel



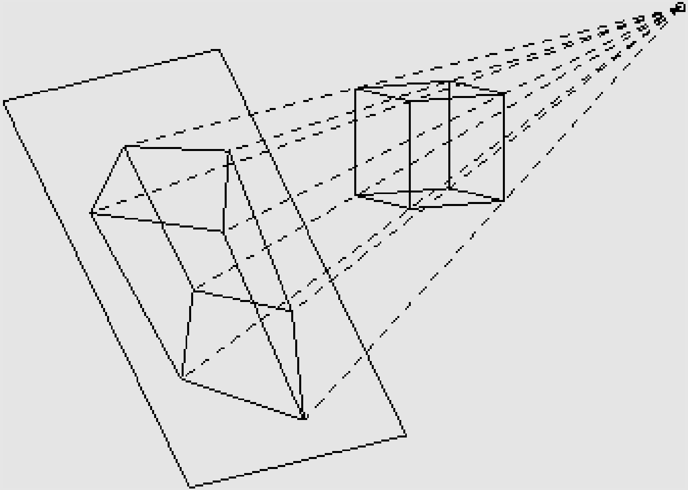
Quellen: `https://de.wikipedia.org/wiki/Drei-Finger-Regel`, `https://de.wikipedia.org/wiki/Korkenzieherregel`

Allgemeine und orthogonale Parallelprojektionen



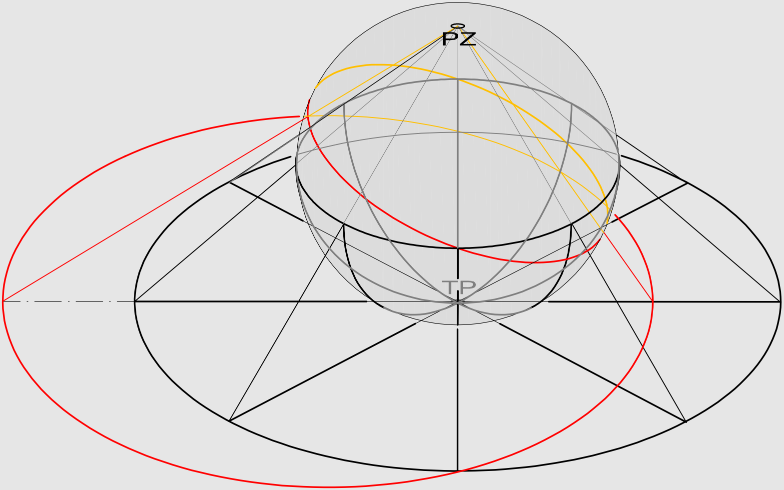
Quelle: `http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/~ehartmann/html_cdg/node1.html`

Zentralprojektion



Quelle: `http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/~ehartmann/html_cdg/node1.html`

Stereografische Projektion

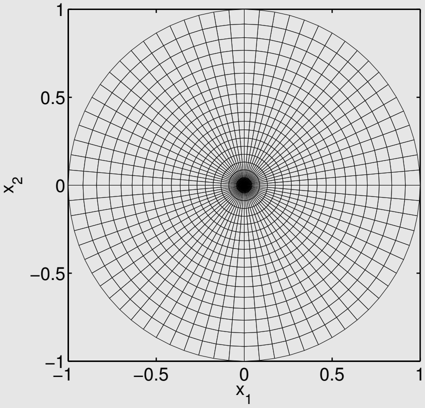


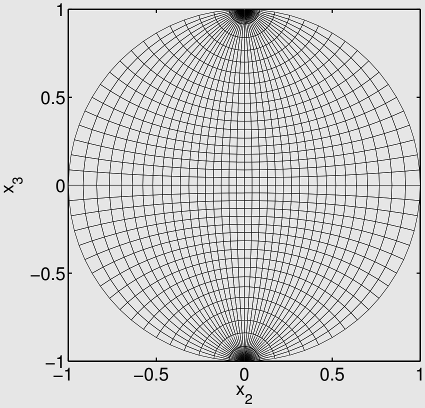
Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Stereografische_Projektion (© Analemma)

Stereografische Projektion

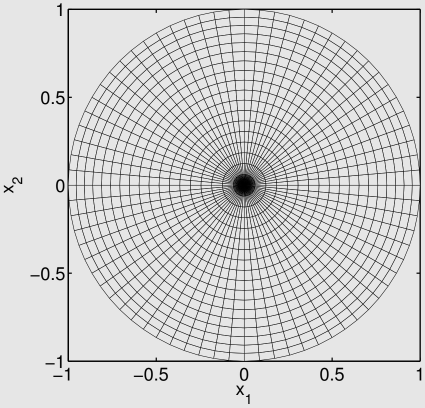
Quelle: `http://images.math.cnrs.fr/IMG/jpg/TN_Stereographic_projection.jpg`

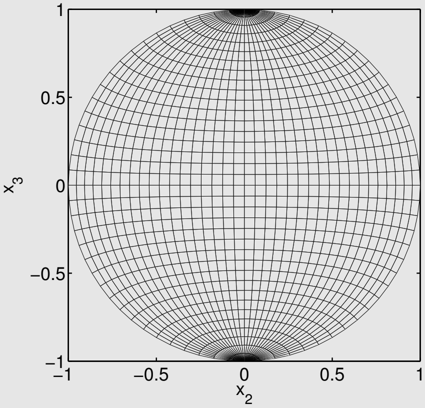
Stereografische Projektion der Hälfte des Einheitskreises





Lambert-Azimutalprojektion der Hälfte des Einheitskreises





Definition einer Linearkombination

Sind $a_1, \ldots, a_m$ Elemente eines Vektorraumes und $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ reelle Zahlen, wird die Kombination aus Streckungen und Additionen

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m$$

als Linearkombination der Vektoren $a_1, \ldots, a_m$ bezeichnet.

Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit

Vektoren $a_1, \ldots, a_m$ heißen linear abhängig, wenn es eine nichttriviale Linearkombination aus ihnen gibt (nicht alle $\lambda_i = 0$), welche den Nullvektor ergibt:

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m \ = \ 0$$

Andernfalls, d. h. wenn sich diese Bedingung nur durch $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$ erfüllen lässt, werden die Vektoren als linear unabhängig bezeichnet.

Definition einer Basis

Ein Satz von Vektoren x_1, x_2, x_3, ... eines Vektorraums (es dürfen unendlich viele sein) wird als Basis bezeichnet, wenn sich jeder Vektor a (des Vektorraumes) in eindeutiger Weise als Linearkombination aus diesen darstellen lässt:

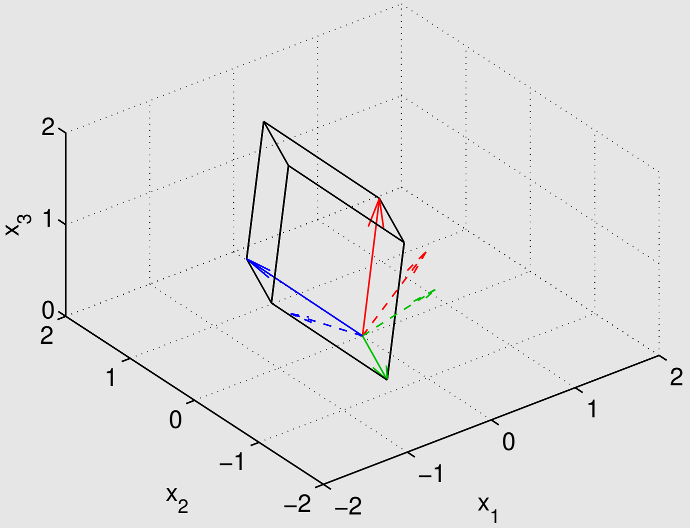
$$a = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m$$

Achtung: Eine Linearkombination besteht immer aus endlich vielen Vektoren, auch wenn die Basis aus unendlich vielen besteht.

Koordinaten

Die Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ in der Darstellung eines Vektors a durch eine Basis sind die Koordinaten des Vektors a bzgl. der Basis.

Reziproke Basis



Definition einer linearen Abbildung

Eine Abbildung F von einem Vektorraum in einen anderen Vektorraum (es kann auch derselbe Vektorraum wie der erste sein) ist linear, wenn sie sich in folgender Weise mit der Addition und der Streckung von Vektoren verträgt:

L1 Für alle Vektoren a und b ist $F(a+b) = F(a) + F(b)$.

L2 Für alle Vektoren a und alle reellen Zahlen λ ist $F(\lambda a) = \lambda F(a)$.

Wichtige Typen linearer Abbildungen

Linearform: lineare Abbildung eines Vektorraums in die reellen Zahlen (der einfachsten nichttriviale Vektorraum)

Endomorphismus: lineare Abbildung von einem Vektorraum in denselben Vektorraum

Matrix einer linearen Abbildung bzgl. einer Basis

Sei F eine lineare Abbildung eines endlichdimensionalen Vektorraums (Endomorphismus) und $x_1, \dots, x_n$ eine Basis dieses Vektorraums. Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

von F bzgl. dieser Basis wird definiert, indem F auf die Basisvektoren angewandt wird und das jeweilge Ergebnis wieder als Linearkombination der Basisvektoren dargestellt wird:

$$F(x_i) = a_{1i}\, x_1 + \cdots + a_{ni}\, x_n$$

Die Anwendung von F auf den i-ten Basisvektor liefert also die i-te Spalte von A.

Bild und Kern einer linearen Abbildung

Sei F eine lineare Abbildung von einem Vektorraum V in einen Vektorraum W.

Bild von F $=$ $\mathrm{im}(F)$ $=$ Menge der Vektoren aus W, welche tatsächlich von F erreicht wird.

Kern von F $=$ $\ker(F)$ $=$ Nullraum von F $=$ Menge der Vektoren aus V mit $F(x) = 0$.

Bild und Kern von F sind Unterräume von V bzw. W.

Rang einer linearen Abbildung

Rang von F $=$ $\mathrm{rank}(F)$ $=$ $\dim(\mathrm{im}(F))$

Dimensionsformel

$$\dim(V) \;=\; \dim(\ker(F)) + \dim(\mathrm{im}(F))$$

Matrixform eines linearen Gleichungssystems

Jedes lineare Gleichungssystem mit m Gleichungen der Form

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \dots & + & \dots & + & \dots & = & \dots \\ a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

für die n Unbekannten $x_1, \dots, x_n$ lässt sich in Matrixform

$$Ax = b$$

schreiben mit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Spur einer $n \times n$-Matrix

Definition:

$$\mathrm{tr}(A) \;=\; a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

Eigenschaften:

- Die Spur ist eine Linearform des Vektorraumes der $n \times n$-Matrizen:

$$\mathrm{tr}(A+B) \;=\; \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B) \quad \text{und} \quad \mathrm{tr}(\lambda A) \;=\; \lambda\,\mathrm{tr}(A)$$

- $\mathrm{tr}(AB) \;=\; \mathrm{tr}(BA) \quad (\text{aber} \;\neq\; \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B))$

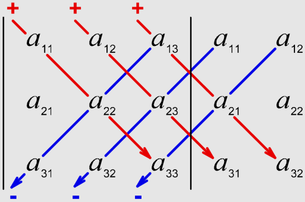
Spur einer linearen Abbildung

Spur einer linearen Abbildung F in einem (endlichdimensionalen) Vektorraum = Spur ihrer Matrix bzgl. einer beliebigen Basis (ist unabhängig von der Wahl der Basis)

Definition der Determinante einer $n \times n$-Matrix

$$n = 2: \quad \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{aligned} n = 3: \quad \det(A) &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$



Quelle: `https://de.wikipedia.org/wiki/Regel_von_Sarrus` (von Eisenbahn%s - Eigenes Werk, CC-BY-SA 4.0)

$n > 3$: alle Permutationen der Spalten, aufwändig

Eigenschaften der Determinante

- Folgende Kriterien sind äquivalent:
  (1) $\det(A) \neq 0$
  (2) $\operatorname{rank}(A) = n$
  (3) $\ker(A) = \{0\}$
  (4) A ist invertierbar.
  (5) Die Spalten von A sind linear unabhängig.
- $\det(A)$ ändert sich nicht, wenn man ein Vielfaches einer Spalte zu einer anderen Spalte addiert.
- $|\det A|$ ist das von den Spalten von A (als Vektoren des $\mathbb{R}^n$ interpretiert) aufgespannte Volumen (Fläche in $\mathbb{R}^2$).
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

Determinante einer linearen Abbildung

Determinante einer linearen Abbildung F in einem (endlichdimensionalen) Vektorraum $=$ Determinante ihrer Matrix bzgl. einer beliebigen Basis (ist unabhängig von der Wahl der Basis)