

Vorlesungsunterlagen

Dynamische Einflüsse auf das Schwerefeld der Erde

Stefan Hergarten
Institut für Geo- und Umweltnaturwissenschaften
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg



Geophysik
30. Mai 2020

1 Gravitationsfeld und Schwerfeld

Die Beschleunigung $\vec{g}(\vec{x})$, welche auf eine am Ort \vec{x} relativ zur Erde ruhende Masse wirkt, wird als Schwerfeld der Erde bezeichnet. Streng genommen müsste man die Definition so präzisieren, dass beispielsweise elektromagnetische Kräfte nicht berücksichtigt werden.

Die Gravitation der Erde liefert den Hauptbeitrag zum Schwerfeld der Erde. Die weiteren Beiträge sind entweder zeitabhängig oder resultieren aus Bewegungen und werden daher als dynamische Einflüsse bezeichnet. Die wichtigsten dynamischen Beiträge zum Schwerfeld der Erde sind

- die Zentrifugalbeschleunigung aus der Erdrotation,
- die Gravitation der Sonne,
- die Zentrifugalbeschleunigung aus der Rotation der Erde um die Sonne,
- die Gravitation des Mondes und
- die Zentrifugalbeschleunigung aus der Rotation des Erde-Mond-Systems.

2 Zentrifugal- und Coriolis-Beschleunigung

Zentrifugal- und Coriolis-Beschleunigung treten auf, wenn wir uns in einem rotierenden Bezugssystem befinden. Unter <http://hergarten.at/extra/beschleunigung.pdf> finden Sie eine Illustration der Beschleunigung, wenn wir uns mit konstanter Geschwindigkeit über eine rotierende Scheibe bewegen. Links ist die geradlinige Bewegung von außen betrachtet dargestellt, rechts in einem Koordinatensystem, welches sich mit der Scheibe mitdreht. Die roten Pfeile zeigen die aktuelle Geschwindigkeit und die orangefarbenen Pfeile die aktuelle Beschleunigung. Diese Beschleunigung lässt sich zerlegen in einen Anteil, welcher radial vom Mittelpunkt nach außen zeigt (violett) und einen Anteil, der senkrecht auf der Geschwindigkeit steht (grün). Der Anteil der Beschleunigung, der radial nach außen zeigt, wird als Zentrifugalbeschleunigung bezeichnet und der Anteil senkrecht zur Geschwindigkeit als Coriolis-Beschleunigung.

Im Folgenden werden die Formeln für die beiden Anteile der Beschleunigung im rotierenden System hergeleitet. Wir nehmen an, dass wir uns auf einer

Bahnkurve $\vec{x}(t)$ in \mathbb{R}^3 bewegen. Dann ist $\dot{\vec{x}}(t)$ unsere Geschwindigkeit und $\ddot{\vec{x}}(t)$ die Beschleunigung. Im Folgenden verwenden wir den Punkt als Symbol für die Ableitung nach der Zeit, $\frac{d}{dt}$. Weiter nehmen wir an, dass wir uns in einem sich drehenden Koordinatensystem befinden, sodass die drei Basisvektoren $\vec{b}_1(t)$, $\vec{b}_2(t)$ und $\vec{b}_3(t)$ sich mit der Zeit ändern. Der Einfachheit halber betrachten wir eine Rotation um die x_3 -Achse mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω , sodass die rotierenden Basisvektoren

$$\vec{b}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2(t) = \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

sind. Die Ableitungen dieser Basisvektoren sind

$$\dot{\vec{b}}_1 = \begin{pmatrix} -\omega \sin(\omega t) \\ \omega \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = \omega \vec{b}_2 \quad (2)$$

$$\dot{\vec{b}}_2 = \begin{pmatrix} -\omega \cos(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = -\omega \vec{b}_1 \quad (3)$$

$$\dot{\vec{b}}_3 = \vec{0} \quad (4)$$

wobei die Argumente (t) weggelassen wurden.

Sind $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ und $\xi_3(t)$ die Koordinaten von $\vec{x}(t)$ bzgl. der obigen Basis, gilt

$$\vec{x} = \xi_1 \vec{b}_1 + \xi_2 \vec{b}_2 + \xi_3 \vec{b}_3. \quad (5)$$

Die Geschwindigkeit ergibt sich dann durch Ableiten nach der Produktregel als

$$\dot{\vec{x}} = \dot{\xi}_1 \vec{b}_1 + \xi_1 \dot{\vec{b}}_1 + \dot{\xi}_2 \vec{b}_2 + \xi_2 \dot{\vec{b}}_2 + \dot{\xi}_3 \vec{b}_3 + \xi_3 \dot{\vec{b}}_3 \quad (6)$$

$$= (\dot{\xi}_1 - \omega \xi_2) \vec{b}_1 + (\dot{\xi}_2 + \omega \xi_1) \vec{b}_2 + \dot{\xi}_3 \vec{b}_3, \quad (7)$$

und die Beschleunigung durch nochmaliges Ableiten als

$$\ddot{\vec{x}} = (\ddot{\xi}_1 - \omega \dot{\xi}_2) \vec{b}_1 + (\dot{\xi}_1 - \omega \xi_2) \dot{\vec{b}}_1 \quad (8)$$

$$+ (\ddot{\xi}_2 + \omega \dot{\xi}_1) \vec{b}_2 + (\dot{\xi}_2 + \omega \xi_1) \dot{\vec{b}}_2 + \ddot{\xi}_3 \vec{b}_3 + \dot{\xi}_3 \dot{\vec{b}}_3 \quad (9)$$

$$= (\ddot{\xi}_1 - 2\omega \dot{\xi}_2 - \omega^2 \xi_1) \vec{b}_1 + (\ddot{\xi}_2 + 2\omega \dot{\xi}_1 - \omega^2 \xi_2) \vec{b}_2 + \ddot{\xi}_3 \vec{b}_3. \quad (10)$$

Die Faktoren vor den Basisvektoren $\vec{b}_1(t)$, $\vec{b}_2(t)$ und $\vec{b}_3(t)$ sind die Koordinaten des Beschleunigungsvektors bzgl. dieser Basis. Die weitere Interpretation wird einfacher, wenn wir nur den Zeitpunkt $t = 0$ betrachten, wo die

beiden Koordinatensysteme gleich sind. In diesem Fall müssen wir die Position nicht umrechnen, d. h. der Koordinatenvektor $\vec{\xi}$ bzgl. der rotierenden Basis ist identisch mit dem Vektor \vec{x} . In diesem Fall vereinfacht sich Gl. 10 zu

$$\ddot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \ddot{\xi}_1 - 2\omega\dot{\xi}_2 - \omega^2\xi_1 \\ \ddot{\xi}_2 + 2\omega\dot{\xi}_1 - \omega^2\xi_2 \\ \ddot{\xi}_3 \end{pmatrix} = \ddot{\vec{\xi}} + 2\omega \begin{pmatrix} -\dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_1 \\ 0 \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Für die hier betrachtete Drehung um die x_3 -Achse ist der Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$. Der letzte Vektor in Gl. 11 ist dann der Anteil von $\vec{\xi}$ senkrecht zur Drehachse, den wir im Folgenden mit $\vec{\xi}_\perp$ bezeichnen. Der mittlere Vektor in Gl. 11 lässt sich darstellen als

$$\omega \begin{pmatrix} -\dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{\omega} \times \dot{\vec{\xi}}, \quad (12)$$

sodass die Beschleunigung

$$\ddot{\vec{x}} = \ddot{\vec{\xi}} + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{\xi}} - \omega^2\vec{\xi}_\perp \quad (13)$$

ist.

Wenn wir uns nur mit dem rotierenden Koordinatensystem bewegen, ist $\dot{\vec{\xi}} = 0$ und $\ddot{\vec{\xi}} = 0$. Dann ist die Beschleunigung

$$\ddot{\vec{x}} = -\omega^2\vec{\xi}_\perp. \quad (14)$$

Diese Beschleunigung wird benötigt, damit wir uns mit dem rotierenden Koordinatensystem auf einer Kreisbahn bewegen. Sie zeigt senkrecht zur Drehachse hin und wird als Zentripetalbeschleunigung bezeichnet.

Alternativ können wir Gl. 13 auch in der Form

$$\ddot{\vec{\xi}} = \ddot{\vec{x}} - 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{\xi}} + \omega^2\vec{\xi}_\perp = \ddot{\vec{x}} + \vec{a}_c + \vec{a}_z \quad (15)$$

schreiben. Dies bedeutet, dass die Beschleunigung $\ddot{\vec{\xi}}$, die wir im rotierenden Koordinatensystem messen, sich aus drei Komponenten zusammensetzt. Die erste ist die echte Beschleunigung $\ddot{\vec{x}}$. Hinzu kommt die Zentrifugalbeschleunigung

$$\vec{a}_z = \omega^2\vec{\xi}_\perp. \quad (16)$$

Diese zeigt senkrecht von der Drehachse weg nach außen. Der dritte Beitrag ist die Coriolis-Beschleunigung

$$\vec{a}_c = -2\vec{\omega} \times \dot{\vec{\xi}} = 2\dot{\vec{\xi}} \times \vec{\omega}. \quad (17)$$

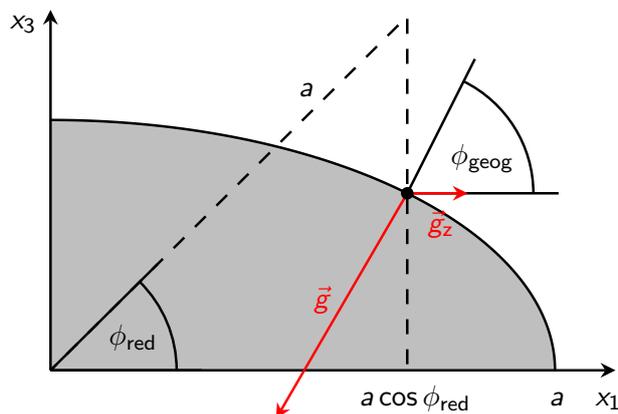


Abbildung 1: Zentrifugalbeschleunigung auf dem Referenzellipsoid.

Diese tritt nur auf, wenn wir uns im rotierenden Koordinatensystem zusätzlich bewegen. Da sich das Schwerfeld auf (relativ zur Erde ruhende) Körper bezieht, wird die Coriolis-Beschleunigung im Schwerfeld der Erde nicht berücksichtigt.

3 Der Beitrag der Zentrifugalbeschleunigung zur Schwere

Die Zentrifugalbeschleunigung der Erdrotation hat einen deutlichen Einfluss auf die Schwere. Wie bei der Gravitation, wird auch bei der Zentrifugalbeschleunigung meist das Symbol g_c statt a_c verwendet, wenn es um die Rotation der Erde geht.

Nach dem Geodätischen Referenzsystem 1980 (GRS80, praktisch identisch mit WGS84) ist die Länge der Äquatorachse $a = 6\,378\,137\text{ m}$ und die Winkelgeschwindigkeit $\omega = 7.292115 \times 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Dies entspricht der Tageslänge eines Sterntags von 86164.10 s (kürzer als ein Sonnentag). Nach Gl. 16 ergibt sich hieraus am Äquator eine Zentrifugalbeschleunigung von $g_z^{\text{max}} = 0.0339157 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, was etwa $\frac{1}{300}$ der Gravitationsbeschleunigung entspricht.

Außerhalb des Äquators ist der Abstand von der Erdachse, also die Länge des Vektors $\vec{\xi}_{\perp}$, allerdings geringer als a . Wie in Abb. 1 dargestellt, ist auf dem Referenzellipsoid $|\vec{\xi}_{\perp}| = a \cos \phi_{\text{red}}$, und damit $|\vec{g}_z| = \omega^2 a \cos \phi_{\text{red}}$.

In Aufgabe 8 lernen wir allerdings, dass nicht die gesamte Zentrifugalbe-

schleunigung zur Schwere beiträgt, sondern nur der Anteil, der in Richtung der Gravitation zeigt. Wenn wir annehmen, dass diese senkrecht zum Referenzellipsoid steht, ist der Winkel zwischen der Gravitationsbeschleunigung und der Zentrifugalbeschleunigung $\alpha = 180^\circ - \phi_{\text{geog}}$ (Abb. 1). Nach Aufgabe 8(d) ist dann der Anteil der Zentrifugalbeschleunigung, der sich auf die Schwere auswirkt,

$$g_z \approx |\vec{g}_z| \cos \alpha = -|\vec{g}_z| \cos \phi_{\text{geog}} = -\omega^2 a \cos \phi_{\text{red}} \cos \phi_{\text{geog}}. \quad (18)$$

Da sich ϕ_{red} und ϕ_{geog} nicht sehr stark unterscheiden, fällt der Beitrag der Zentrifugalbeschleunigung zur Schwere ungefähr wie $\cos^2 \phi$ vom Äquator zu den Polen. Einmal, weil sich der Abstand von der Rotationsachse verringert, aber auch, weil sich der Winkel der Zentrifugalbeschleunigung zur Schwere ändert.

4 Die Normalschwere

Das GRS80 definiert $g_a = 9.7803267715 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ und $g_c = 9.8321863685 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ als Referenzwerte für die Schwere (Gravitation und Zentrifugalbeschleunigung) auf dem Referenzellipsoid am Äquator (g_a) und an den Polen (g_c).

Demnach beträgt die Differenz zwischen Äquator und Pol $g_c - g_a = 0.051859597 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Wie im letzten Abschnitt festgestellt, beträgt die Zentrifugalbeschleunigung am Äquator $g_z^{\text{max}} = 0.0339157 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ und 0 an den Polen. Demnach stammt die Schweredifferenz zwischen Pol und Äquator zu 65 % aus der Zentrifugalbeschleunigung und zu 35 % aus der Gravitation. Der Unterschied in der Gravitationsbeschleunigung zwischen Pol und Äquator resultiert daraus, dass wir an den Polen insgesamt näher an der Masse sind als an den Polen.

Die Normalschwere auf den anderen Punkten des Referenzellipsoids ergibt sich aus der Formel von C. Somigliana (1860–1955):

$$g_0(\phi_{\text{geog}}) = \frac{a g_a \cos^2 \phi_{\text{geog}} + c g_c \sin^2 \phi_{\text{geog}}}{\sqrt{a^2 \cos^2 \phi_{\text{geog}} + c^2 \sin^2 \phi_{\text{geog}}}} \quad (19)$$

Diese gilt für ein Ellipsoid, bei dem die Oberfläche eine Äquipotentialfläche ist. Was dies bedeutet, werden wir in den folgenden Abschnitten sehen.

Gl. 19 mit den Parameterwerten nach dem GRS80 ($a = 6\,378\,137 \text{ m}$, $c = 6\,356\,752.3141 \text{ m}$) wird als Normalschwereformel bezeichnet. Sie hat

große Bedeutung bei der Interpretation von Schweremessungen. Hierbei werden typischerweise die Ergebnisse von Schweremessungen mit der Normalschwereformel verglichen, um Rückschlüsse auf die Massenverteilung im oberflächennahen und tiefen Untergrund zu ziehen.

Grundsätzlich gibt es verschiedene Versionen der Normalformel. Diese enthalten teils ältere Werte der Parameter oder Näherungsformeln, die früher ohne Computer leichter zu berechnen waren.

5 Das Potential der Zentrifugalbeschleunigung

Ähnlich wie die Gravitationsbeschleunigung lässt sich auch die Zentrifugalbeschleunigung

$$\vec{g}_z(\vec{x}) = \omega^2 \vec{x}_\perp. \quad (20)$$

(Gl. 16 mit \vec{x} statt $\vec{\xi}$) als Gradient einer skalaren Potentialfunktion darstellen. Definieren wir

$$U_z(\vec{x}) = -\frac{1}{2}\omega^2 |\vec{x}_\perp|^2, \quad (21)$$

gilt

$$\nabla U_z(\vec{x}) = -\omega^2 \vec{x}_\perp. \quad (22)$$

Für den einfachsten Fall einer Rotation um die x_3 -Achse ist $\vec{x}_\perp = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und somit $|\vec{x}_\perp|^2 = x_1^2 + x_2^2$, sodass die Gültigkeit von Gl. 22 leicht zu erkennen ist. Für eine beliebige Richtung von $\vec{\omega}$ ist es etwas komplizierter. Aus Gl. 22 folgt unmittelbar

$$\vec{g}_z(\vec{x}) = -\nabla U_z(\vec{x}), \quad (23)$$

sodass U_z nach Gl. 21 tatsächlich das Potential der Zentrifugalbeschleunigung ist.

6 Das Geoid

Das Geoid ist definiert als die Äquipotentialfläche des Gesamtpotentials (Gravitation der Erde und Rotation)

$$U(\vec{x}) = U_g(\vec{x}) + U_z(\vec{x}) \quad (24)$$

zum Wert $U_0 = -62636853.4 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$. Dieser Wert ist so gewählt, dass das Geoid mit der freien Oberfläche der Ozeane (ohne Gezeiten) übereinstimmt

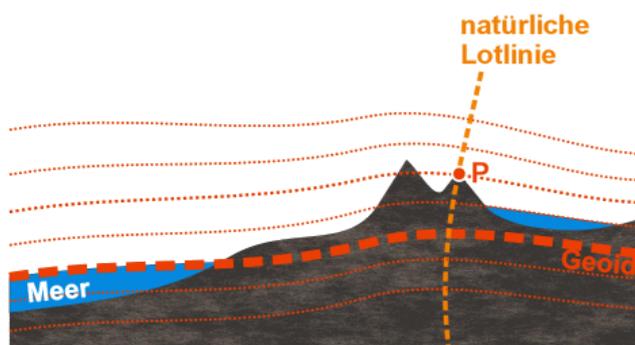


Abbildung 2: Definition des Geoids. Quelle: Wikipedia

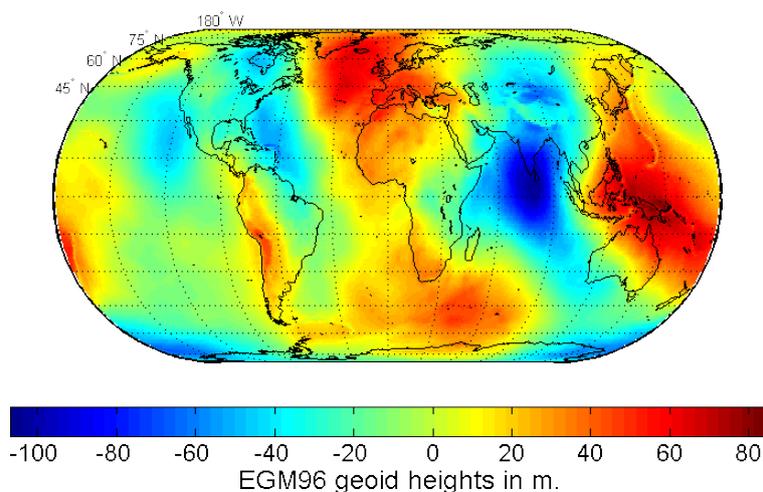


Abbildung 3: Höhen EGM96-Geoids gegenüber dem Referenzellipsoid. Quelle: Wikipedia

(Abb. 2). Hätte man einen stärker negativen Wert U_0 gewählt, läge das Geoid tiefer und bei einem weniger stark negativen Wert höher. Das Geoid weicht vom Referenzellipsoid um bis zu -108 m bzw. $+82$ m ab. Abbildung 3 zeigt die Geoidhöhen des EGM96 (Earth Gravitational Model 1996), welches das am weitesten verbreitete globale Bezugssystem für die Höhenmessung darstellt, gegenüber dem Referenzellipsoid.

Da das Geoid eine Äquipotentialfläche ist, steht der Schwerevektor als negativer Gradient des Potentials überall senkrecht auf dem Geoid. Die Schwere selbst ist natürlich nicht überall auf dem Geoid gleich.

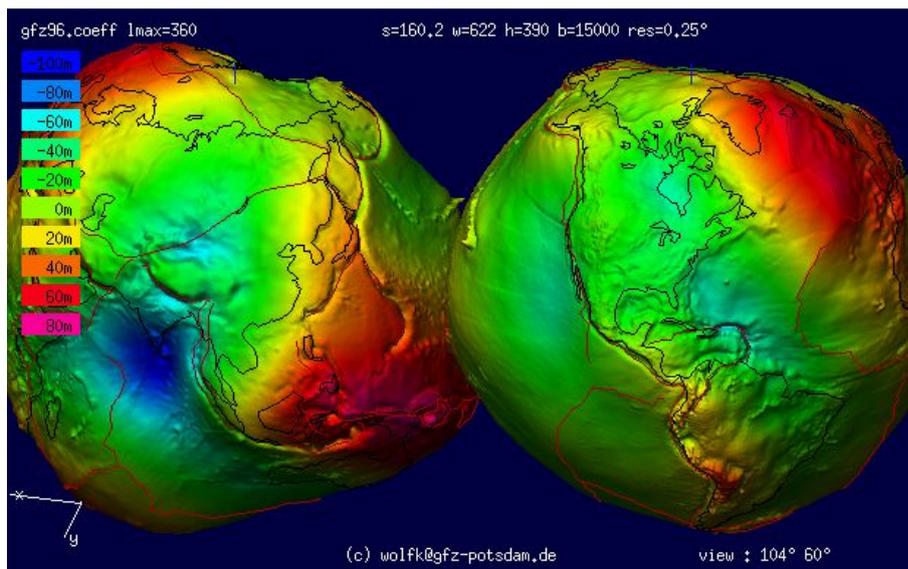


Abbildung 4: Stark überhöhte Darstellung des Geoids als „Potsdamer Kartoffel“. Quelle: Lexikon der Fernerkundung

Die Idee hinter dem Geoid geht auf C. F. Gauß (1777–1855) und J. B. Listing (1808–1882) zurück. Allerdings ist das Schwerepotential und damit auch das Geoid im Gegensatz zur Schwere nicht direkt messbar. Die Berechnung des Schwerepotentials erfordert globale Schweremessungen. Hier brachte die in den 1960er Jahren beginnende Satellitengeodäsie wesentliche Fortschritte, während frühere Messungen meist nur einzelne Schwereprofile, z. B. über ein Gebirge, umfassten. Abbildung 4 zeigt eine stark überhöhte Darstellung des Geoids. Die zugrundeliegenden Daten der Schwerepotentials (Datensatz EIGEN-6C) wurden aus mehreren Satellitenmissionen und terrestrischen Messungen kombiniert. Die in Abb. 4 gezeigte überhöhte Darstellung wird auch als „Potsdamer Kartoffel“ bezeichnet, weil Gruppen vom GeoForschungsZentrum Potsdam sowohl an den Satellitenmissionen als auch an der Auswertung wesentlich beteiligt waren.

Das Geoid ist keine geometrische Beschreibung der Erdoberfläche, sondern charakterisiert die Massenverteilung im Erdinneren. Grundsätzlich verursachen Massenüberschüsse im Untergrund Erhebungen im Geoid und Massendefizite Dellen im Geoid. Qualitativ ist das leicht anhand von Abb. 5 zu verstehen. Ein Massenüberschuss sorgt dafür, dass der Schwerevektor \vec{g} in der Umgebung gegenüber der Normalen auf das Referenzellipsoid leicht zum Massenüberschuss hin zeigt. Da \vec{g} senkrecht auf dem Geoid steht, muss das Geoid zum Massenüberschuss hin ansteigen. Dies gilt auch, wenn sich

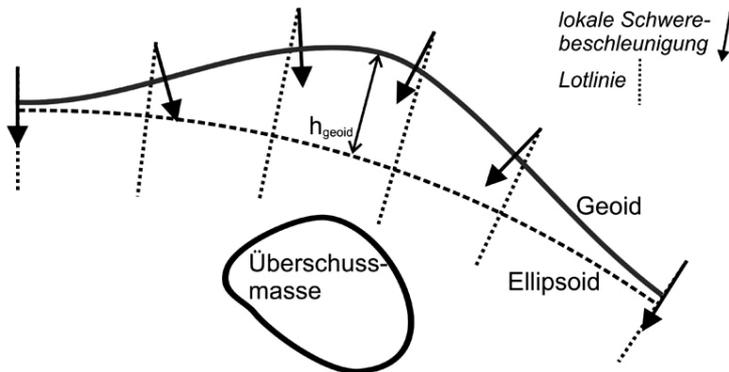


Abbildung 5: Anhebung des Geoids durch einen Massenüberschuss im Untergrund. Quelle: Clauser, Einführung in die Geophysik

der Massenüberschuss oberhalb des Referenzellipsoids befindet, z. B. bei einem Gebirge. Bzgl. der Schwere selbst ist der Effekt jedoch unterschiedlich. Hier führen nur Massenüberschüsse unterhalb des Referenzellipsoids zu einer Erhöhung der Schwere, während Gebirge in ihrer Umgebung die Schwere verringern.

Die Veränderung der Höhe des Geoids, welche aus einer Erhöhung oder Verringerung des Schwerepotentials resultiert, lässt sich relativ leicht berechnen. Angenommen, das lokale Koordinatensystem sei am Geoid ausgerichtet, sodass $U(x_1, x_2, 0) = U_0$ ist mit dem obigen Referenzwert U_0 . Nehmen wir nun zunächst an, dass sich der Referenzwert U_0 ändert. Nach dieser Veränderung liegt das Geoid in einer Höhe $x_3 = h(U_0)$, welche die Bedingung

$$U(x_1, x_2, h(U_0)) = U_0 \quad (25)$$

erfüllen muss. Leiten wir diese Bedingung nach U_0 ab, erhalten wir nach der Kettenregel

$$\frac{\partial}{\partial x_3} U(x_1, x_2, x_3) \frac{d}{dU_0} h(U_0) = 1. \quad (26)$$

Der erste Term ist bis auf das Vorzeichen die x_3 -Komponente des Schwerevektors, $g_3 = -\frac{\partial U}{\partial x_3}$. Da der Schwerevektor in negative x_3 -Richtung zeigt (senkrecht zum Geoid), gilt $\frac{\partial U}{\partial x_3} = g$. Damit ergibt sich

$$\frac{d}{dU_0} h(U_0) = \frac{1}{g}. \quad (27)$$

Demnach würde also eine Erhöhung des Referenzpotentials U_0 um $1 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$ das Geoid um gut 10 cm anheben. Dieses Ergebnis lässt sich direkt auf

Änderungen des Potentials U übertragen. Eine Erhöhung von U hat auf das Geoid dieselbe Auswirkung wie eine gleich große Verringerung von U_0 . Demnach ist

$$\frac{d}{dU}h(U) = -\frac{1}{g}, \quad (28)$$

sodass eine Erhöhung des aktuellen Potentials U um $1 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$ das Geoid um gut 10 cm absenkt.

7 Gezeiten

Die Gravitation des Mondes und die Zentrifugalbeschleunigung der Rotation um den gemeinsamen Schwerpunkt des Erde-Mond-Systems verursachen die stärkste zeitabhängige Komponente der Schwere auf der Erde.

Die Masse des Mondes beträgt $m_m = 7.348 \times 10^{22}$ kg, was etwa $\frac{1}{80}$ der Masse der Erde entspricht. Die Bewegung um den gemeinsamen Schwerpunkt hat eine Umlaufzeit von $T = 27.3217$ Tage.

Wenn die Bahn eine Kreisbahn wäre, entspräche dies einer Winkelgeschwindigkeit von $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2.662 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$. Ist d der Abstand zwischen Mond und Erde, dann hat der gemeinsame Schwerpunkt einen Abstand von

$$s = \frac{m_m}{m_e + m_m} d \quad (29)$$

vom Erdmittelpunkt, wobei m_e die Masse der Erde ist. Hieraus resultiert eine Zentrifugalbeschleunigung von

$$g_z = \omega^2 s = \omega^2 \frac{m_m}{m_e + m_m} d. \quad (30)$$

Diese muss genauso groß sein wie die Gravitationsbeschleunigung des Mondes,

$$g_g = \frac{Gm_m}{d^2}. \quad (31)$$

Hieraus ergibt sich der mittlere Abstand (Mitte-Mitte, Kreisbahn) zwischen Erde und Mond als

$$d = \sqrt[3]{\frac{G(m_e + m_m)}{\omega^2}} \approx 384\,700 \text{ km}. \quad (32)$$

Der gemeinsame Schwerpunkt liegt entsprechend $s = 4676$ km vom Erdmittelpunkt entfernt, also bei etwa 73 % des Erdradius (im Erdinneren).

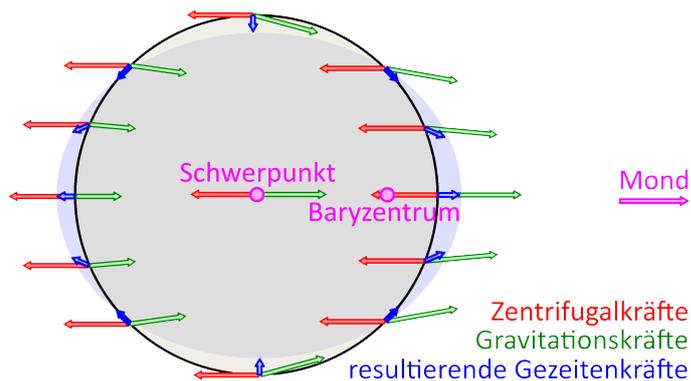


Abbildung 6: Gravitations- und Zentrifugalbeschleunigung des Mondes an verschiedenen Orten auf der Erdoberfläche. Quelle: Wikipedia, ©Lämpel

Die Gravitations- und Zentrifugalwirkung des Mondes kann wahlweise direkt durch Beschleunigungen oder durch das Potential beschrieben werden. Zumindest für ein qualitatives Verständnis ist die direkte Beschreibung durch Beschleunigungen sinnvoll. Wie in Abb. 6 dargestellt, wirkt die Gravitation des Mondes an verschiedenen Orten auf der Erdoberfläche unterschiedlich. Die Zentrifugalbeschleunigung ist hingegen überall dieselbe. Dies mag auf dem ersten Blick überraschend sein, denn eigentlich sollte diese in der gezeigten Ebene überall vom gemeinsamen Schwerpunkt radial nach außen gerichtet sein. Hierbei ist jedoch zu beachten, dass die Erde bei der Berechnung der Gezeiten nicht um ihre eigene Achse rotieren darf. Die Bewegung um den gemeinsamen Schwerpunkt muss wie in Abb. 7 dargestellt betrachtet werden, da die Zentrifugalbeschleunigung aus der Eigenrotation schon im Geoid enthalten ist.

In der Summe aus Gravitations- und Zentrifugalbeschleunigung bleibt dann eine Beschleunigung zum mond nächsten Punkt hin auf der mond zugewandten Halbkugel und umgekehrt. Hieraus resultiert jeweils ein Flutberg auf der mond zugewandten Seite und einer auf der mond abgewandten Seite.

Für quantitative Berechnungen ist allerdings das Potential einfacher. Das Gravitationspotential des Mondes ist an jeder Stelle \vec{x} auf der Erde

$$U_g(\vec{x}) = -\frac{Gm_m}{|\vec{x} - \vec{x}_m|} + \frac{Gm_m}{|\vec{x}_m|}, \quad (33)$$

wobei \vec{x}_m der Ort des Mondes ist. Der zweite Term ist eine Konstante, welche zum Potential addiert wurde. Wir wissen, dass grundsätzlich beliebige

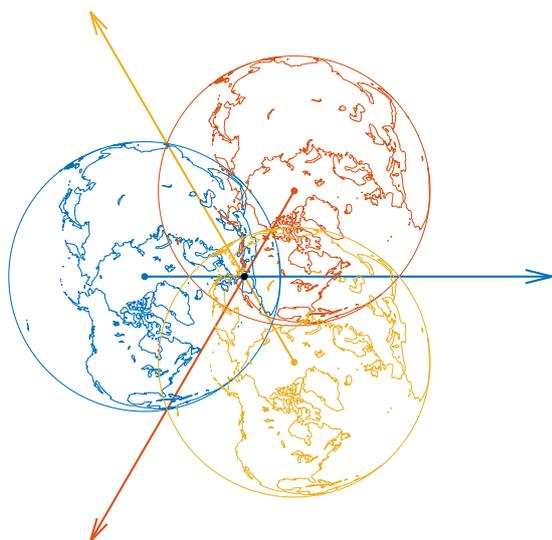


Abbildung 7: Rotation der Erde um den gemeinsamen Schwerpunkt. Die Pfeile zeigen in Richtung des Mondes.

Konstanten zum Potential addiert werden können. Normalerweise verzichtet man allerdings darauf und erreicht damit, dass das Potential im Unendlichen gegen 0 konvergiert. Hier ist es allerdings günstiger, das Nullniveau des Potentials in den Erdmittelpunkt zu legen, was durch die Hinzunahme des zweiten Terms erreicht wird. Ohne diesen Term wäre die Energie, um Erde und Mond aus dem Unendlichen auf den tatsächlichen Abstand zusammenzubringen, Teil des Potentials, wodurch sich das Geoid systematisch erhöhen würde. Das Gravitationspotential des Mondes für eine für eine kugelförmige Erde, wenn sich der Mond über dem Nullmeridian ($\lambda = 0^\circ$) und dem Äquator $\phi = 0^\circ$ befindet, ist in Abb. 8 dargestellt. Die Absenkung des Potentials am mondnächsten Punkt und die Erhöhung des Potentials auf der gegenüberliegenden Seite betragen etwa $200 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$. Nach den Überlegungen aus dem letzten Abschnitt entspricht dies einer Verschiebung der Äquipotentialfläche um etwa 20 m zum Mond hin.

Die Zentrifugalbeschleunigung ist an allen Punkten gleich, und zwar

$$\vec{g}_z = -\omega^2 \vec{s}_\perp \quad (34)$$

wobei \vec{s} der Vektor vom Erdmittelpunkt zum gemeinsamen Schwerpunkt ist und \vec{s}_\perp dessen Komponente senkrecht zur Rotationsachse. Dann ist das Zentrifugalpotential

$$U_z(\vec{x}) = \omega^2 \vec{s}_\perp \cdot \vec{x}. \quad (35)$$

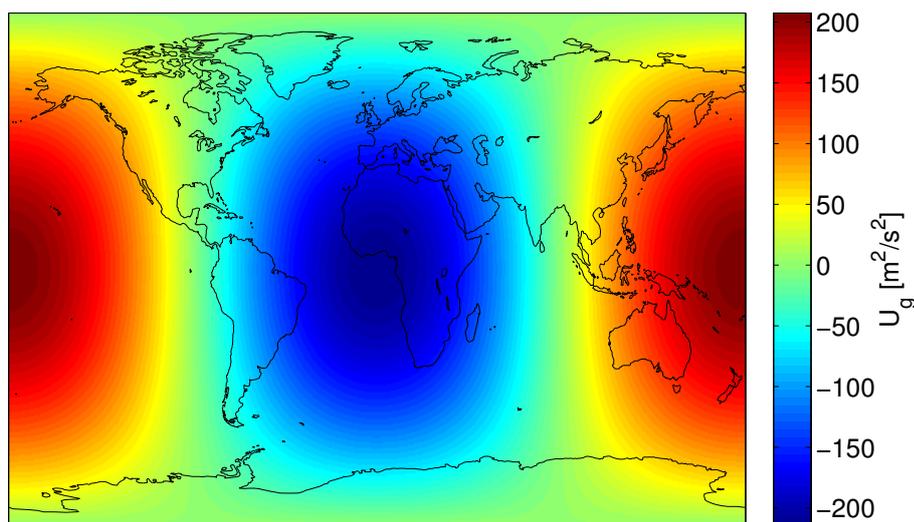


Abbildung 8: Gravitationspotential des Mondes nach Gl. 33 für eine kugelförmige Erde, wenn sich der Mond über dem Nullmeridian ($\lambda = 0^\circ$) und dem Äquator $\phi = 0^\circ$ befindet.

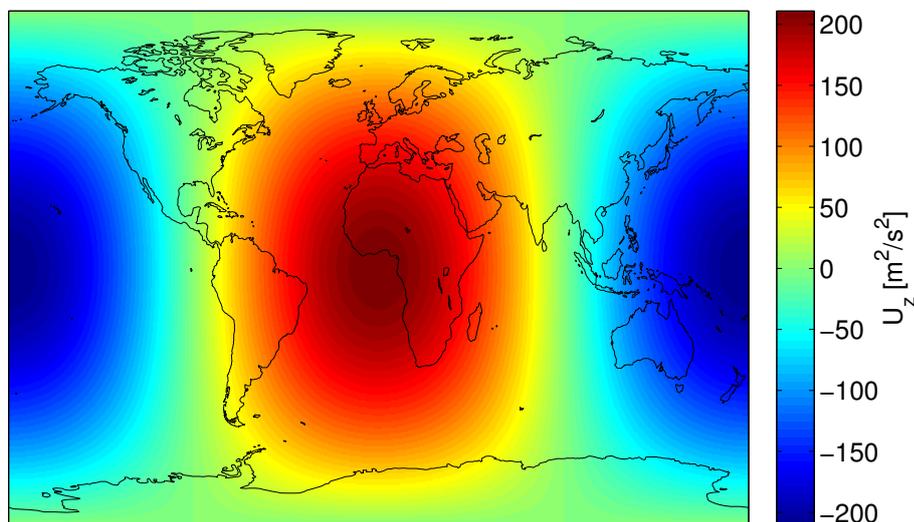


Abbildung 9: Zentrifugalpotential der Rotation um den gemeinsamen Schwerpunkt nach Gl. 35 für eine kugelförmige Erde, wenn sich der Mond über dem Nullmeridian ($\lambda = 0^\circ$) und dem Äquator $\phi = 0^\circ$ befindet.

Das Zentrifugalpotential ist in Abb. 9 dargestellt. Auf dem ersten Blick ist es bis auf das Vorzeichen dem Gravitationspotential ähnlich, sodass sich beide

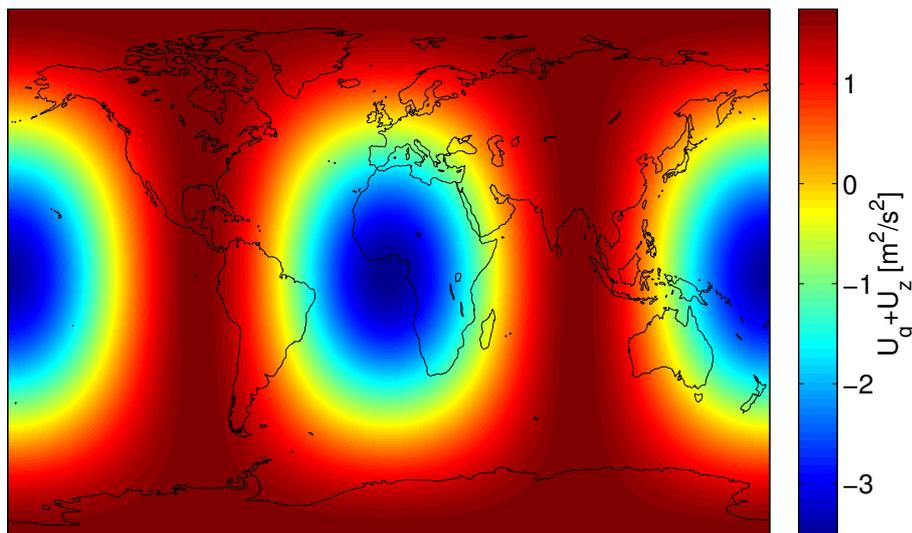


Abbildung 10: Gesamtpotential (Gravitations- und Zentrifugalpotential) des Erde-Mond-Systems für eine kugelförmige Erde, wenn sich der Mond über dem Nullmeridian ($\lambda = 0^\circ$) und dem Äquator $\phi = 0^\circ$ befindet.

weitgehend kompensieren sollten. Abb. 10 zeigt die Summe beider Potentiale. Das verbleibende Potential ist tatsächlich nur in der Größenordnung von 1% der beiden einzelnen Potentiale. Das Potential weist zwei lokale Minima auf, eines am mondächsten Punkt und eines am mondfernen Punkt. Echte Maxima gibt es nicht, diese sind zu Linien degeneriert.

Abb. 11 zeigt die daraus resultierende Anhebung bzw. Absenkung der Äquipotentialfläche nach Gl. 28. Die Wasseroberfläche eines die Erde komplett umspannenden Ozeans würde im Idealfall der Äquipotentialfläche folgen. Wenn sich nun die Erde um ihre eigene Achse dreht, während die Äquipotentialfläche gleich bleibt, gibt es pro Tag zwei Flutberge und zwei Eb-
betäler. Durch die Rotation des Erde-Mond-Systems ist die Periode dieser Halbtageszeiten allerdings nicht genau 12 h, sondern etwa 12.42 h.

Die Amplitude ist am Äquator am stärksten und beträgt hier etwa 53 cm (Minimum zu Maximum). Zu den Polen hin nimmt die Amplitude ab. Die beiden Eb-
betäler sind aus Symmetriegründen immer gleich tief. Für die beiden Flutberge gilt dies näherungsweise auch.

Die bisherige Betrachtung gilt allerdings nur, wenn sich der Mond in der Äquatorebene der Erde befindet. Diese ist gegenüber der Ekliptik (Bahnebene der Erde um die Sonne) um etwa 23° geneigt. Die Bahn des Mondes

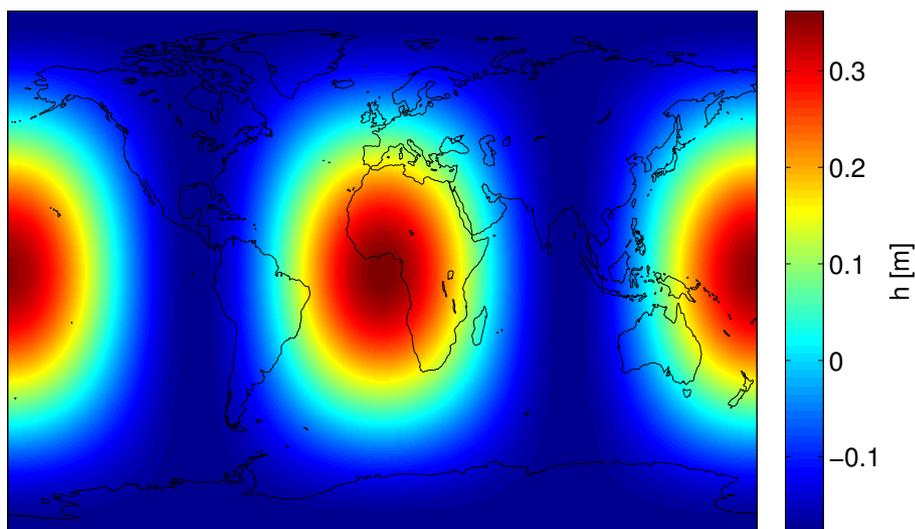


Abbildung 11: Anhebung und Absenkung der Äquipotentialfläche durch das in Abb. 10 dargestellte Potential.

weicht hingegen nur um etwa 5° von der Ekliptik ab. Demnach schwankt die Position des Mondes gegenüber der Äquatorebene der Erde um etwa $\pm 18^\circ$. Abb. 12 zeigt dieselbe Anhebung bzw. Absenkung der Äquipotentialfläche wie in Abb. 11, allerdings mit einer so gedrehten Erde, dass der Mond über dem Punkt $\lambda = 0^\circ$ und $\phi = 18^\circ$ steht.

Nun führt die Rotation der Erde dazu, dass außerhalb der Äquators die beiden Flutberge nicht mehr gleich hoch sind. Bei dieser Position ist der dem Mond zugewandte Flutberg auf der Nordhalbkugel höher als der gegenüberliegende. Der Flutberg auf der abgewandten Seite ist hingegen auf der Südhalbkugel größer. Die Ebбетäler haben hingegen aus Gründen der Symmetrie immer dieselbe Tiefe. Wenn wir uns einem Pol nähern ($|\phi| \geq 90^\circ - 18^\circ = 72^\circ$), verschwindet der kleinere Flutberg sogar komplett. In diesem Fall gehen die Halbtageszeiten in Tageszeiten über. Die Amplitude ist in diesen Bereichen allerdings ohnehin recht gering.

Die Sonne verursacht trotz des wesentlich größeren Abstands von der Erde ebenfalls einen deutlichen Gezeiteneffekt. Die maximale Amplitude ist allerdings nur etwa halb so groß wie beim Mond (maximal 25 cm). Der Effekt durch die Neigung der Äquatorebene und damit die Asymmetrie der Flutberge ist hingegen etwas stärker als beim Mond. Der wesentliche Unterschied liegt allerdings darin, dass die Periode der Halbtageszeiten genau 12 h Stunden beträgt. Dadurch entsteht ein zeitlich veränderliches Über-

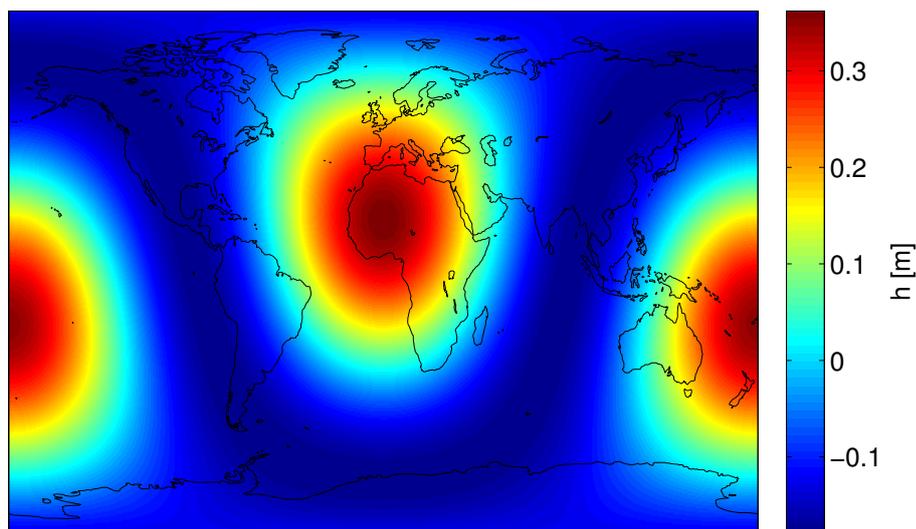


Abbildung 12: Anhebung und Absenkung der Äquipotentialfläche, wenn der Mond über dem Punkt $\lambda = 0^\circ$ und $\phi = 18^\circ$ steht.

lagerungsmuster. Den stärksten Effekt – als Springtiden bezeichnet – gibt es, wenn Sonne, Erde und Mond in einer Linie stehen (Vollmond und Neumond). Dies tritt etwa alle 29 Tage auf. In der Mitte dazwischen sind die Gezeiten am schwächsten.

Wie oben erwähnt, gelten die Argumente für die Amplituden nur für einen die Erde umspannenden Ozean, dessen Wasseroberfläche dem Geoid folgt. Dies wäre aber selbst dann nicht möglich, wenn die gesamte Erdoberfläche mit Wasser bedeckt wäre. Am Äquator müssten sich die Flutberge und Eb-
betäler dann mit einer Geschwindigkeit von ca. $450 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ fortbewegen. Dass das Wasser nicht mit einer solchen Geschwindigkeit fließt, dürfte klar sein. Stattdessen ist die Bewegung die einer Flachwasserwelle, wie sie auch bei Tsunamis auftritt. Die Wasserteilchen bewegen sich dabei hauptsächlich horizontal und recht langsam. Die gesamte Wassersäule bis zum Meeresgrund bewegt sich gleichmäßig. Solche Wellen gehören selbst in tiefen Ozeanen zu den Flachwasserwellen, weil die Wellenlänge wesentlich größer als die Wassertiefe ist.

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Flachwasserwelle ist $v = \sqrt{gd}$, wobei d die Wassertiefe ist. Bei $d = 4000 \text{ m}$ ergibt dies $v \approx 200 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Auch wenn dies recht hoch erscheint, reicht es nicht, um am Äquator der Erdrotation zu folgen und eine umlaufende Welle zu erzeugen. Bei einer Periode von $T = 12 \text{ h}$ ergibt sich eine Wellenlänge von $L = vT \approx 8600 \text{ km}$.

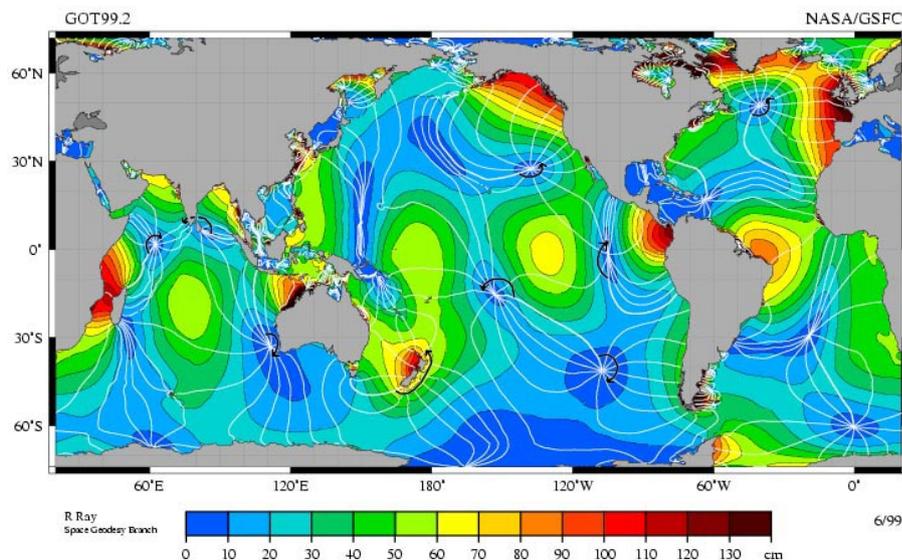


Abbildung 13: Berechnetes weltweites Amplitudenmuster der Gezeiten.
Quelle: Quelle: NASA – Scientific Visualization Studio

In einem Ozean begrenzter Größe bilden sich stehende Wellen. Die kürzeste Möglichkeit ist hierbei eine halbe Wellenlänge, also $\frac{\lambda}{2} \approx 4300$ km bei $d = 4000$ m. Kleinere Wasserflächen lassen sich nur schlecht zu Schwingungen anregen. Auf größeren Wasserflächen bilden sich im Idealfall Muster mit Knotenlinien, an den der Wasserstand konstant bleibt, aus. Durch Überlagerung mehrerer Wellenlängen findet man allerdings kein solches Muster, sondern nur einzelne Punkte ohne Tidenhub, sogenannte amphidromische Punkte. Abbildung 13 zeigt ein berechnetes Amplitudenmuster.

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Flachwasserwellen sinkt mit geringer werdender Wassertiefe. Dadurch steigt die Amplitude an, woraus das große Gefährdungspotential von Tsunamis an der Küste resultiert. Entsprechend kann der Tidenhub an den Küsten wesentlich größer als die Schwingungsamplitude der Äquipotentialfläche sein und mehrere Meter betragen.

8 Die Coriolis-Beschleunigung auf der Erde

Die Coriolis-Beschleunigung wirkt auf Objekte, die sich relativ zur rotierenden Erde bewegen. Für eine Bewegung an der Erdoberfläche ist es sinnvoll, die im letzten Semester kennengelernte lokal an der Erdoberfläche ausge-

richtete Basis aus den Vektoren

$$\vec{e}_\lambda = \begin{pmatrix} -\sin \lambda \\ \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin \phi \cos \lambda \\ -\sin \phi \sin \lambda \\ \cos \phi \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \lambda \\ \cos \phi \sin \lambda \\ \sin \phi \end{pmatrix} \quad (36)$$

zu verwenden. Dabei zeigt \vec{e}_λ lokal nach Osten, \vec{e}_ϕ nach Norden und \vec{e}_r nach oben. Wenn wir statt einer Kugel das Referenzellipsoid betrachten, müssen wir die geographische Breite verwenden, da diese die lokale Richtung des Referenzellipsoids beschreibt.

Der Vektor der Winkelgeschwindigkeit ist im ursprünglichen kartesischen Koordinatensystem $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$. Da die obige Basis orthonormal ist, ergeben sich die Koordinaten von $\vec{\omega}$ bzgl. dieser Basis einfach durch Bildung der Skalarprodukte:

$$\omega_\lambda = \vec{\omega} \cdot \vec{e}_\lambda = 0, \quad (37)$$

$$\omega_\phi = \vec{\omega} \cdot \vec{e}_\phi = \omega \cos \phi \quad \text{und} \quad (38)$$

$$\omega_r = \vec{\omega} \cdot \vec{e}_r = \omega \sin \phi. \quad (39)$$

Damit lässt sich $\vec{\omega}$ im lokalen Koordinatensystem darstellen aus

$$\vec{\omega} = \omega \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}. \quad (40)$$

Betrachten wir nur eine Bewegung parallel zur Erdoberfläche, ist die Geschwindigkeit $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Damit ist die Coriolis-Beschleunigung (Gl. 17)

$$\vec{g}_c = 2\vec{v} \times \vec{\omega} = 2\omega \begin{pmatrix} v_2 \sin \phi \\ -v_1 \sin \phi \\ v_1 \cos \phi \end{pmatrix}. \quad (41)$$

Hieraus lässt sich unmittelbar ablesen, dass eine Bewegung in Ost-West-Richtung zu einer Vertikalkomponente der Coriolis-Beschleunigung führt. Diese vertikale Komponente ist natürlich wesentlich geringer als die Schwere, muss aber bei Messungen der Schwere auf Schiffen oder in Flugzeugen berücksichtigt werden. Der Effekt ist benannt nach Loránd Eötvös (1848–1919). Die Schwere wird verringert, wenn wir uns in Drehrichtung der Erde bewegen und vergrößert, wenn wir uns entgegen der Drehrichtung der Erde bewegen. Der Effekt ist am Äquator am stärksten und verschwindet an den Polen. Der Effekt entspricht der zusätzlichen Zentrifugalbeschleunigung, wenn wir uns vorstellen, dass die Erde entsprechend schneller oder langsamer rotiert.

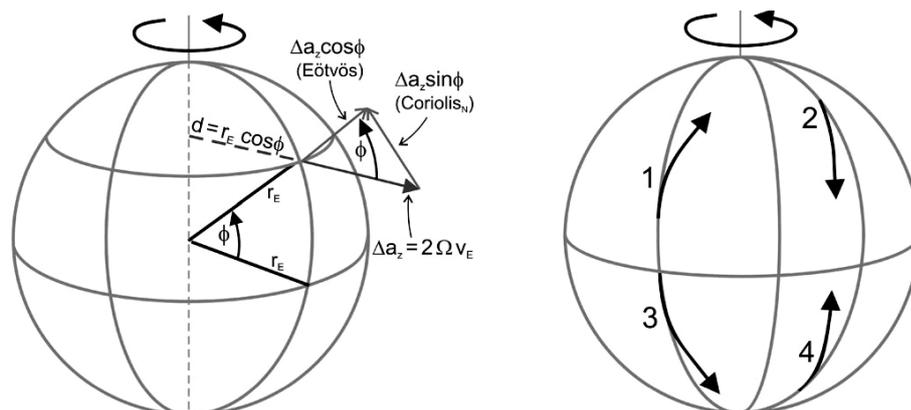


Abbildung 14: Richtung der Coriolis-Beschleunigung auf der Erde. Quelle: Clauser, Einführung in die Geophysik

Die Horizontalkomponente der Coriolis-Beschleunigung ist hingegen an den Polen maximal und verschwindet am Äquator. Auf der Nordhalbkugel ($\phi > 0$) zeigt die Beschleunigung immer senkrecht nach rechts gegenüber der Beschleunigung, unabhängig von der Bewegungsrichtung (Abb. 14). Auf der Südhalbkugel zeigt sie entsprechend nach links. Der Betrag der horizontalen Komponente ist $2\omega |\sin \phi| |\vec{v}|$. Dieser ist ebenfalls unabhängig von der Bewegungsrichtung.

Die Coriolis-Beschleunigung hat einen recht großen Einfluss auf Strömungen im Ozean und in der Atmosphäre. Sie führt zu einer eindeutigen Drehrichtung von Hoch- und Tiefdruckgebieten (Abb. 15), welche je nach Halbkugel unterschiedlich ist, und zu einer bevorzugten Drehrichtung von Wirbelstürmen.

Hierbei ist allerdings zu beachten, dass die Coriolis-Beschleunigung keinen unmittelbaren Einfluss auf die Bildung des Wirbels hat. Diese resultiert daraus, dass Partikel radial zum Zentrum hin gezogen werden, also in Richtung zu niedrigem Druck hin beim Tiefdruckgebiet. Angenommen, $\vec{x}(t)$ ist die Bahn eines Partikels, und die Beschleunigung zeigt zum Koordinatenursprung. Dann gilt für den Drehimpuls $\vec{L}(t) = \vec{x}(t) \times (m\ddot{\vec{x}}(t))$:

$$\dot{\vec{L}}(t) = \dot{\vec{x}}(t) \times (m\dot{\ddot{\vec{x}}}(t)) + \vec{x}(t) \times (m\ddot{\ddot{\vec{x}}}(t)). \quad (42)$$

Der erste Term ist offensichtlich null. Der zweite Term ist ebenfalls null, wenn die Beschleunigung zum Koordinatenursprung zeigt, da dann $\vec{x}(t)$ und $\ddot{\vec{x}}(t)$ umgekehrt parallel zu einander stehen. Dies bedeutet, dass der Drehimpuls konstant bleibt. Ist nun $\vec{\omega}$ der Vektor der Winkelgeschwindigkeit

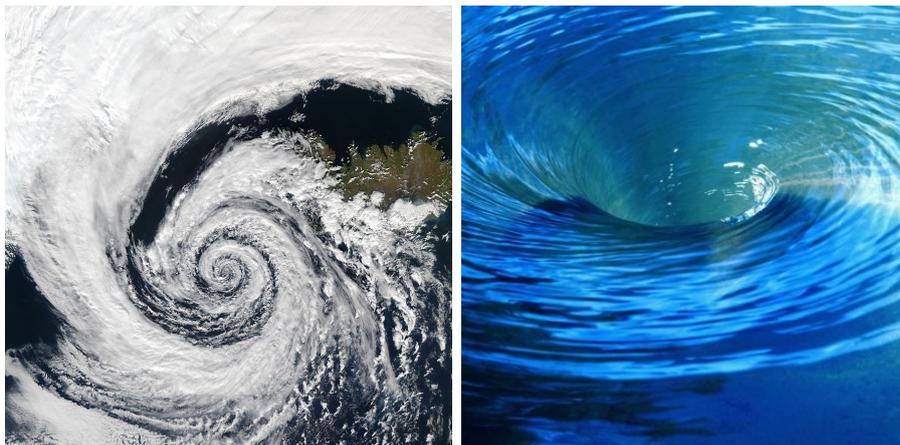


Abbildung 15: Rotation eines Tiefdruckgebiets und eines Abflusses. Quellen: Wikipedia, Planet Schule

bei einer Drehbewegung, ist die Geschwindigkeit $\dot{\vec{x}} = \vec{\omega} \times \vec{x}$. Damit ist der Drehimpuls

$$\vec{L} = \vec{x} \times (m\vec{\omega} \times \vec{x}). \quad (43)$$

Steht \vec{x} senkrecht auf der Drehachse, so ist der Betrag des Drehimpulses

$$L = |\vec{x} \times (m\vec{\omega} \times \vec{x})| = m\omega r^2, \quad (44)$$

wobei $r = |\vec{x}|$ der Abstand vom Zentrum ist. Somit folgt aus der Erhaltung des Drehimpulses, dass das Produkt ωr^2 konstant ist. Bewegen sich die Partikel also auf das Zentrum zu, nimmt die Winkelgeschwindigkeit entsprechend

$$\omega(t) \sim \frac{1}{r(t)^2} \quad (45)$$

zum Zentrum hin stark zu. Die Zunahme ist so stark, dass auch der Betrag der Bahngeschwindigkeit

$$|\dot{\vec{x}}| = |\vec{\omega} \times \vec{x}| = \omega r \sim \frac{1}{r} \quad (46)$$

zunimmt und damit auch die kinetische Energie. Dies wird beispielsweise beim Eiskunstlauf genutzt (Abb. 16).

Für den rotierenden Wirbel in Strömungen auf der Erde bedeutet dies, dass die Zunahme der Geschwindigkeit zum Zentrum hin aus der Drehimpulserhaltung resultiert und nicht mit der Erdrotation zusammenhängt. Die Coriolis-Beschleunigung spielt nur zu Anfang eine Rolle. Wenn sich die



Abbildung 16: Wirkung der Drehimpulserhaltung beim Eiskunstlauf. Quelle: Leifi Physik

Partikel weit außen radial auf das Zentrum zubewegen, werden sie natürlich auf der Nordhalbkugel leicht nach rechts abgelenkt. Sobald sich dann eine leichte Drehbewegung ausgebildet hat, verstärkt sich diese durch die Drehimpulserhaltung zum Zentrum hin immer weiter.

Quantitativ lässt sich dies erfassen, indem die Drehimpulse der Erdrotation und der Bewegung der Partikel um das Zentrum addiert werden. Dies bedeutet, dass der Vektor der Winkelgeschwindigkeit insgesamt $\vec{\omega} + \vec{\omega}_e$ ist, wobei $\vec{\omega}_e$ die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation ist. Nach Gl. 40 beträgt die vertikale Komponente dieser $\omega_e \sin \phi$, sodass nun aus der Drehimpulserhaltung folgt

$$\omega(t) + \omega_e \sin \phi \sim \frac{1}{r(t)^2}. \quad (47)$$

Wenn also irgendwo weit außen $|\omega| < \omega_e |\sin \phi|$ ist und weiter innen die Beschleunigung ohne große Störungen radial zum Zentrum hin wirkt, definiert die Erdrotation tatsächlich den Drehsinn des Wirbels. Dies funktioniert auf großen Skalen, beispielsweise bei Tiefdruckgebieten, sehr gut. Bei Wirbelstürmen ist der Effekt ebenfalls so stark, dass sie mehrheitlich wie Tiefdruckgebiete rotieren, allerdings nicht immer. Bei kleinen Wasserbehältern genügt hingegen eine minimale Asymmetrie in der Form oder eine kleine Bewegung des Wassers, um den durch die Erdrotation vorgegebenen Drehsinn zu stören. Waschbecken und Badewannen wissen daher nicht, auf welcher Halbkugel sie wohnen. Bei größeren Wasserbecken wurde experimentell ein systematischer Drehsinn beobachtet, wenn das Wasser zuvor mehrere Tage lang in Ruhe war.