Vorlesungsunterlagen

Referenzellipsoid und Breitengrade

Stefan Hergarten
Institut für Geo- und Umweltnaturwissenschaften
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Geophysik
5. Mai 2020

1 Die Erde als Kugel

Das Konzept einer kugelförmigen Erde gibt es schon seit der Antike, obwohl dieses im Mittelalter zwischenzeitlich wieder verlorenging. Die erste bekannte Berechnung des Erdumfangs geht auf Eratosthenes (Ende des 3. Jahrhunderts v. Chr.) und ist umgerechnet auf heutige Einheiten mit knapp 40 000 km schon ziemlich gut.

Die historische Definition des Meters (1799) als eine der Grundeinheiten des SI-Systems bezieht sich auf den Erdumfang. Ein Meter wurde zunächst als zehn-millionster Teil des Viertels desjenigen Erdumfangs festgelegt, der Paris und den Nordpol berührt (Abb. 1).

Von daher ist es nicht überraschend, dass der Erdumfang ziemlich genau 40 000 km beträgt, wenn man eine Strecke vom Nordpol über den Äquator zum Südpol und wieder zum Nordpol betrachtet.

Hieraus ergibt sich, dass 1 Grad in Nord-Süd-Richtung einer Strecke von

$$1^\circ \mathrel{\hat{=}} \frac{40\,000\,\mathrm{km}}{360^\circ} = 111.11\,\mathrm{km} \tag{1}$$

entspricht. Ebenfalls ergäbe sich daraus ein Erdradius von

$$r = \frac{40\,000\,\mathrm{km}}{2\pi} = 6366.2\,\mathrm{km}. \tag{2}$$

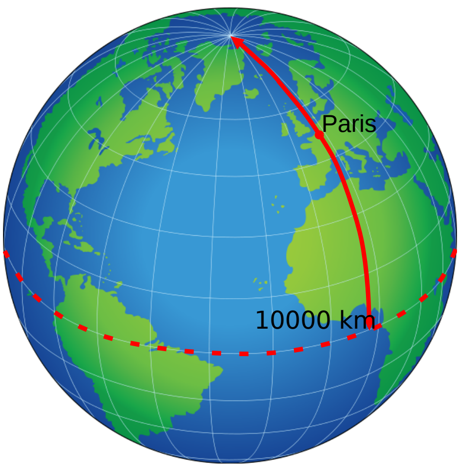

Abbildung 1: Grundlage des historischen Definition des Meters. Quelle: Wikipedia

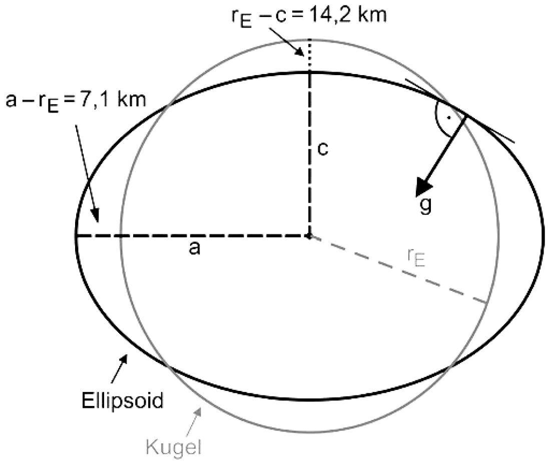

Abbildung 2: Illustration des Erdellipsoids. Quelle: Clauser, Einführung in die Geophysik

Wegen der Abweichung von der Kugelform stimmt Gl. 1 aber nur im Mittel (Aufgabe 2), und der Wert von r stimmt nicht mit dem üblicherweise angenommenen Erdradius überein (Aufgabe 1).

2 Die Ellipsoidform der Erde

Die ersten Überlegungen, dass die Erde durch ihre Rotation an den Polen gegenüber einer Kugel abgeflacht sein sollte, stammen aus den 17. Jahrhundert. Die einfachste Annäherung dieser Form ist ein Rotationsellipsoid, bei dem die Achsen in Richtung des Äquators gleich lang sind. Der Unterschied zwischen Äquatorachse a und Polachse c beträgt etwa 21 km.

Ein solches Rotationsellipsoid entsteht durch Streckung der Einheitskugel um die Länge der Äquatorachse a in der x_1-x_2-Ebene und um die Länge der Polachse c in x_3-Richtung. Dadurch ist die mathematische Beschreibung eines Rotationsellipsoid ähnlich zur Gleichung der Einheitskugel, wobei x_1, x_2 und x_3 durch die jeweiligen Streckungsfaktoren geteilt werden:

$$\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{c}\right)^2 = 1 \qquad (3)$$

Eine der ersten Berechnungen des Referenzellipsoids wurde von F. W. Bessel (1841) durchgeführt. Dieses Ellipsoid ist nach wie vor in vielen Ländern Grundlage der Landesvermessung.

Das World Geodetic System 1984 (WGS 84) legt die Länge der großen Halbachse (Äquatorradius) als

$$a = 6\,378\,137\,\mathrm{m}$$

fest. Darüber hinaus definiert es die Abplattung (Differenz der Längen geteilt durch große Halbachse) als

$$f = \frac{a-c}{a} = \frac{1}{298.257223563}.$$

Hieraus ergibt sich die kleine Halbachse (Polradius) als

$$c = (1-f)\,a = 6\,356\,752.3142\,\mathrm{m}$$

und der mittlere Radius als

$$r = \sqrt[3]{a^2 c} = 6371\,001\,\mathrm{m}$$

(Aufgabe 1).

3 Breitengrade auf dem Referenzellipsoid

Die Definition des Längengrads λ und des Breitengrads ϕ auf einer Kugel durch Kugelkoordinaten sollte bekannt sein:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r\cos\phi\cos\lambda \\ r\cos\phi\sin\lambda \\ r\sin\phi \end{pmatrix} \tag{4}$$

Auf einem Ellipsoid ist dies allerdings komplizierter, und es gibt verschiedene Definitionen. Durch die Symmetrie in der x_1-x_2-Ebene sind Längengrade jedoch in allen Definitionen gleich.

Eine direkte Verwendung von Kugelkoordinaten (Gl. 4) liefert die geozentrische Breite ϕ_{geoz} (rot in Abb. 3), also

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r\cos\phi_{\mathrm{geoz}}\cos\lambda \\ r\cos\phi_{\mathrm{geoz}}\sin\lambda \\ r\sin\phi_{\mathrm{geoz}} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Diese wird bei allen Darstellungen des Schwerefeldes (und auch des Magnetfeldes) außerhalb der Erde verwendet.

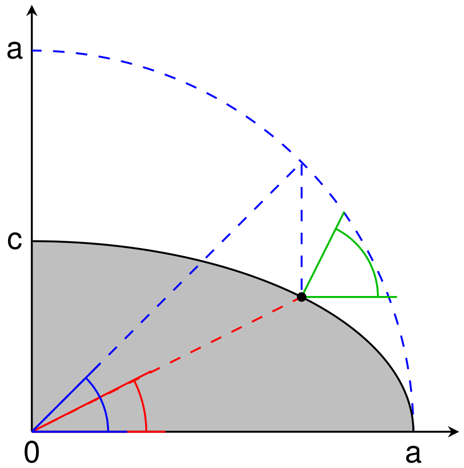

Abbildung 3: Verschiedene Definitionen von Breitengraden auf dem Referenzellipsoid. Rot: geozentrische Breite. Grün: geographische Breite.

Das Problem bei der Verwendung der geozentrische Breite ϕ_{geoz} ist der Radius r von Punkten auf dem Ellipsoid. Um diesen zu bestimmen, muss man Gl. 9 in die Ellisoidgleichung (Gl. 3) einsetzen und erhält dann r in Abhängigkeit von a, c und ϕ_{geoz}.

Von den Berechnungen her wesentlich einfacher ist die reduzierte Breite ϕ_{red} (blau in Abb. 3). Diese beruht auf elliptischen Koordinaten. Im Prinzip wird hierbei die x_3-Achse so getreckt, dass das Referenzellipsoid zu einer Kugel wird. Damit lautet die Darstellung mittels der reduzierten Breite

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r\cos\phi_{\text{red}}\cos\lambda \\ r\cos\phi_{\text{red}}\sin\lambda \\ \frac{c}{a} r\sin\phi_{\text{red}} \end{pmatrix} . \qquad (6)$$

Der Faktor $\frac{c}{a}$ ist die Stauchung der Kugel zum Ellipsoid. Die Fläche mit $r = a$ ist das somit das Referenzellipsoid, und, alle Flächen mit $r = \text{const.}$ sind Ellipsoide mit derselben Abplattung wie das Referenzellipsoid.

Wenn es um Punkte auf dem Referenzellipsoid (oder auf der Erdoberfläche) geht, wird allerdings meist die geographische Breite ϕ_{geog} verwendet. Diese wird auch als geodätische Breite oder ellipsoidische Breite bezeichnet. Die geographische Breite ergibt sich aus dem Winkel zwischen der Normalen auf das Ellipsoid und der Äquatorebene (grün in Abb. 3). Somit lässt sie sich aus dem Sonnenstand bzw. aus der Position von Fixsternen bestimmen, was auch ohne eine genaue Vermessung der Erdoberfläche möglich ist.

In Abb. 3 sieht man, dass

$$|\phi_{\text{geoz}}| \;\leq\; |\phi_{\text{red}}| \;\leq\; |\phi_{\text{geog}}| \tag{7}$$

ist.

Der Zusammenhang zwischen ϕ_{geoz} und ϕ_{red} lässt sich recht leicht herleiten. Betrachten wir der Einfachheit halber $\lambda = 0$, ergibt sich durch Kombination von Gl. 9 und 13

$$\begin{pmatrix} r\cos\phi_{\text{geoz}} \\ 0 \\ r\sin\phi_{\text{geoz}} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} r\cos\phi_{\text{red}} \\ 0 \\ \frac{c}{a} r\sin\phi_{\text{red}} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Teilen wir nun die dritte Komponente dieser Gleichung durch die erste, erhalten wir direkt

$$\tan\phi_{\text{geoz}} \;=\; \frac{c}{a}\tan\phi_{\text{red}} \;=\; (1-f)\tan\phi_{\text{red}}. \tag{9}$$

Beim Zusammenhang zwischen ϕ_{geog} und ϕ_{red} ist es etwas komplizierter. Wir beginnen wieder mit Gl. 13 für $\lambda = 0$. Wenn wir die Ableitung von $\vec{x}$ nach ϕ_{red} nehmen, erhalten wir einen Vektor tangential zum Ellipsoid in Nordrichtung:

$$\frac{\partial}{\partial\phi_{\text{red}}}\vec{x} \;=\; \begin{pmatrix} -r\sin\phi_{\text{red}} \\ 0 \\ \frac{c}{a} r\cos\phi_{\text{red}} \end{pmatrix} \tag{10}$$

Einen (nicht normierten) Normalenvektor auf das Ellipsoid erhalten wir dann durch

$$\vec{n} \;=\; \begin{pmatrix} \frac{c}{a} r\cos\phi_{\text{red}} \\ 0 \\ r\sin\phi_{\text{red}} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Die geographische Breite ist der Winkel dieses Vektors gegenüber der Äquatorebene, sodass

$$\tan\phi_{\text{geog}} \;=\; \frac{r\sin\phi_{\text{red}}}{\frac{c}{a} r\cos\phi_{\text{red}}} \;=\; \frac{a}{c}\tan\phi_{\text{red}}, \tag{12}$$

oder auch

$$\tan\phi_{\text{red}} \;=\; \frac{c}{a}\tan\phi_{\text{geog}} \;=\; (1-f)\tan\phi_{\text{geog}}. \tag{13}$$

Abb. 4 zeigt die Differenz zwischen geographischer, reduzierter und geozentrischer Breite nach Gln. 9 und 13. Die maximale Abweichung beträgt knapp 0.2° (zwischen ϕ_{geog} und ϕ_{geoz}) und tritt bei $\phi = 45°$ auf. Bei etwa 111 km pro Grad (Gl. 1) entspricht diese Differenz gut 20 km.

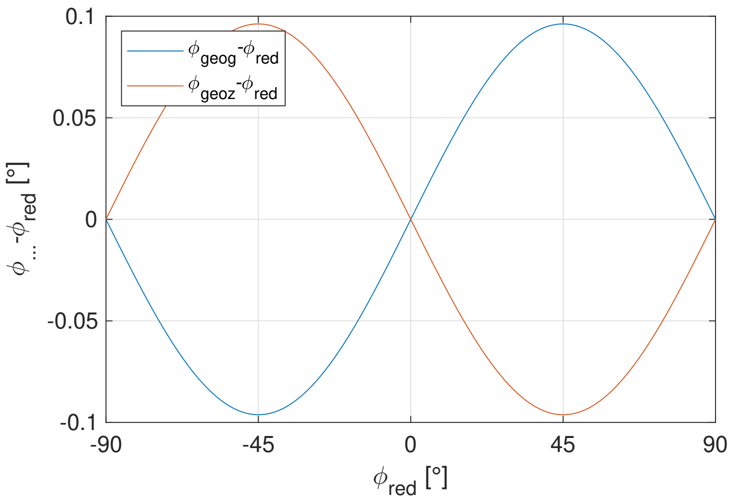

Abbildung 4: Differenz zwischen geographischer, reduzierter und geozentrischer Breite nach Gln. 9 und 13.