Vorlesungsunterlagen

Gravitationsfeld und Gravitationspotential

Stefan Hergarten
Institut für Geo- und Umweltnaturwissenschaften
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Geophysik
7. Mai 2020

Gravitationsfeld und Gravitationspotential
Stefan Hergarten
Geophysik

1 Das Gravitationsfeld einer punktförmigen Masse

Das Gravitationsgesetz wurde erstmals 1687 von Issac Newton formuliert. Die Kraft, mit zwei Massen m_1 und m_2 einander anziehen, ist proportional zu jeder der beiden Massen und nimmt mit dem Quadrat des Abstands ab (Abb. 1).

Das Gravitationsgesetz gilt streng genommen nur für punktförmige Massen. Für ausgedehnte Massen gilt es näherungsweise, wenn der Abstand der Massen viel größer als ihre Ausdehnung ist. Später werden wir sehen, dass es außerdem gilt, wenn die Massen eine kugelsymmetrische Verteilung der Dichte haben.

Befinden sich die beiden Massen an den Orten $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$, lautet Newtons Gravitationsgesetz in Vektorform

$$\vec{F}_2 = -\frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}|^3}\,\vec{r} = -\frac{Gm_1m_2}{|\vec{x}_2-\vec{x}_1|^3}\,(\vec{x}_2-\vec{x}_1) = -\vec{F}_1 \qquad (1)$$

mit

$$\begin{aligned} G &= 6.67430(15)\times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2} &&= \text{Gravitationskonstante} \\ \vec{r} &= \vec{x}_2-\vec{x}_1 &&= \text{Vektor von Masse 1 zu Masse 2} \end{aligned}$$

Auf dem ersten Blick mag der Term $|\vec{r}|^3$ bzw. $|\vec{x}_2-\vec{x}_1|^3$ im Nenner etwas verwirrend sein. Hierbei ist aber zu berücksichtigen, dass $\frac{1}{|\vec{r}|}\vec{r}$ ein Einheitsvektor in Richtung von $\vec{r}$ ist, sodass effektiv nur $|\vec{r}|^2$ bzw. $|\vec{x}_2-\vec{x}_1|^2$ im Nenner übrig bleibt.

Die Ungenauigkeit der Gravitationskonstante (± 15 auf den beiden letzten Stellen) ist mit ca. 0.002 % für eine fundamentale Naturkonstante noch

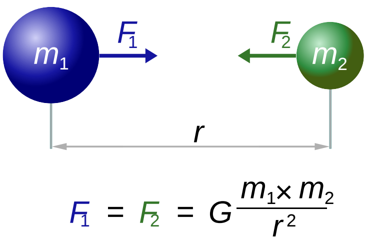

Abbildung 1: Newton's Gravitationsgesetz. Quelle: Wikipedia, ©Dennis Nilsson.

immer sehr hoch. Dies liegt daran, dass man für eine direkte Bestimmung die Kraft zwischen zwei genau bekannten Massen messen müsste. Da solche aber recht klein z. B. im Vergleich zur Masse der Erde sind, sind die Kräfte auch sehr klein und schwer messbar. Im Vergleich dazu ist das Produkt $Gm_e = 3.986004415 \times 10^{14}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}^2}$, wobei m_e die Masse der Erde ist, deutlich genauer bestimmt. Der Grund dafür ist, dass sich dieser Wert aus der Gravitation der Erde bestimmen lässt. Umgekehrt ist m_e nur mit einer Genauigkeit wie G bekannt, also derzeit ca. 0.002 %.

Das Grundgesetz der Mechanik (I. Newton 1687, L. Euler 1750) – manchmal auch als 2. Newtonsches Gesetz bezeichnet – lautet

$$\vec{F} \;=\; m\,\vec{a}. \tag{2}$$

Hieraus folgt, dass die Beschleunigung $\vec{a}_2$ auf die Masse m_2 von dieser unabhängig ist:

$$\vec{a}_2 \;=\; \frac{\vec{F}_2}{m_2} \;=\; -\,\frac{Gm_1}{|\vec{r}|^3}\,\vec{r} \tag{3}$$

Genauso ist natürlich die Beschleunigung $\vec{a}_1$ auf die Masse m_1 von m_1 unabhängig. Dieser Sachverhalt wird hin und wieder in der Form „alle Körper fallen gleichschnell“ oder „schwere Masse = träge Masse“ ausgedrückt.

Die auf eine hypothetische Punktmasse am Ort $\vec{x}$ wirkende Gravitationsbeschleunigung wird als Gravitationsfeld $\vec{g}(\vec{x})$ bezeichnet. Für den Spezialfall einer am Ort $\vec{\xi}$ befindlichen Punktmasse m ergibt sich

$$\vec{g}(\vec{x}) \;=\; -\,\frac{Gm}{|\vec{x}-\vec{\xi}|^3}\left(\vec{x}-\vec{\xi}\right). \tag{4}$$

Das Gravitationsfeld ist ein Vektorfeld. Da es eine Beschleunigung ist, ist die SI-Einheit $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. In der Geophysik wird aus historischen Gründen allerdings oft die Einheit 1 Gal = 1 $\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2}$ verwendet, welche nach Galileo Galilei (1564–1652) benannt ist. Bei der Messung der Gravitationsbeschleunigung geht es allerdings oft um kleine Unterschiede, sodass auch häufig 1 mGal = 10^{-3} Gal = $10^{-5}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 10\,\frac{\mu\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ als Einheit verwendet wird.

2 Superposition von Gravitationsfeldern

Die Gravitationsfelder mehrerer punktförmiger Massen überlagern sich linear im Sinne der Vektoraddition. Damit ist das Gravitationsfeld von n

Punktmassen m_1, ..., m_n, die sich an den Orten $\vec{\xi}_1$, ..., $\vec{\xi}_1$ befinden:

$$\vec{g}(\vec{x}) \;=\; -G\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{|\vec{x}-\vec{\xi}_i|^3}\left(\vec{x}-\vec{\xi}_i\right) \tag{5}$$

Dies lässt sich verallgemeinern auf eine kontinuierliche Massenverteilung mit einer Dichte $\rho(\vec{\xi})$:

$$\vec{g}(\vec{x}) \;=\; -G\int\frac{\rho(\vec{\xi})}{|\vec{x}-\vec{\xi}|^3}\left(\vec{x}-\vec{\xi}\right)d^3\xi, \tag{6}$$

wobei das dreidimensionale Volumenintegral von der Idee her nicht grundlegend anders ist als die Summe über Punktmassen in Gl. 5.

3 Partielle Ableitungen und der Gradient

Das Gravitationsfeld ist bei Berechnungen wegen der Vektoraddition recht unhandlich. Berechnungen werden einfacher, wenn wir statt der Gravitationsfeldes das Gravitationspotential verwenden. Hierfür benötigen wir zunächst die Begriffe der partiellen Ableitung und des Gradienten als Grundlage.

Zunächst betrachten wir Funktionen mehrerer Variablen $f(x_1,\ldots,x_n)$ oder eines Vektors $f(\vec{x})$. Von der Vorstellung her ist es am einfachsten, wenn wenn wir uns die Variablen als räumliche Koordinaten vorstellen, aber es könnte beispielsweise auch die Zeit oder irgendeine andere Eigenschaft dabeisein. Die partielle Ableitung von f bzgl. x_i ist definiert als

$$\frac{\partial}{\partial x_i}f(x_1,\ldots,x_n) \;=\; \lim_{h\to 0}\frac{f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i+h,x_{i+1},\ldots,x_n)-f(x_1,\ldots,x_n)}{h}. \tag{7}$$

Diese Definition ist fast identisch mit der Ableitung einer Funktion einer Variablen,

$$f'(x) \;=\; \frac{d}{dx}f(x) \;=\; \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \tag{8}$$

Man stellt sich also $f(x_1,\ldots,x_n)$ als Funktion von x_i vor und nimmt an, dass alle anderen Variablen konstant (eingefroren) sind. Entsprechend gelten natürlich alle Ableitungsregeln auch für partielle Ableitungen.

Bei den Bezeichnungen hat sich eingebürgert, dass für partielle Ableitungen das Symbol ∂ verwendet wird.

Die partiellen Ableitungen (meist nach den räumlichen Koordinaten) werden oft zu einem Vektor, dem Gradienten der Funktion, zusammengefasst:

$$\mathrm{grad} f(\vec{x}) \;=\; \nabla f(\vec{x}) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f(\vec{x}) \\ \dots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} f(\vec{x}) \end{pmatrix}, \tag{9}$$

wobei die Verwendung des Symbols ∇ statt grad recht weit verbreitet ist.

Die Bedeutung des Gradienten kann am einfachsten an einer Topografie $H(x_1, x_2)$ veranschaulicht werden, wobei x_1 die Koordinate in Ostrichtung und x_2 die in Nordrichtung ist. Dann ist $\frac{\partial}{\partial x_1} H(x_1, x_2)$ die Steigung der Topografie in Ostrichtung und $\frac{\partial}{\partial x_2} H(x_1, x_2)$ die Steigung in Nordrichtung. Abbildung 2 zeigt den Gradienten der Topografie, $\nabla H(x_1, x_2)$, in der Umgebung des Feldberggipfels als Beispiel, welcher sich aus offensichtlichen Gründen perfekt für die Darstellung aller Arten von Feldern eignet.

Ist $\vec{e}$ ein Einheitsvektor, so ist $\nabla H \cdot e$ die Steigung in Richtung von $\vec{e}$. Hieraus ergeben sich die folgenden Eigenschaften der Gradienten, die sich in Abb. 2 zumindest qualitativ erkennen lassen:

- ∇H zeigt in die Richtung, wo H am stärksten ansteigt.
- Die Länge des Vektors, $|\nabla H|$, ist die Steigung von H in Richtung des steilsten Anstiegs.
- ∇H steht senkrecht auf den Höhenlinien.

4 Das Gravitationspotential

Das vektorwertige Gravitationsfeld $\vec{g}(\vec{x})$ lässt sich als Gradient eines skalaren Potentials $U(\vec{x})$ darstellen:

$$\vec{g}(\vec{x}) \;=\; -\nabla U(\vec{x}) \tag{10}$$

Recht einfach ist dies für das Feld einer Punktmasse m, die im Koordinatenursprung sitzt, zu sehen. Definieren wir

$$U(\vec{x}) \;=\; -\frac{Gm}{|\vec{x}|}, \tag{11}$$

ergibt sich

$$\nabla U(\vec{x}) \;=\; \frac{Gm}{|\vec{x}|^3}\,\vec{x}, \tag{12}$$

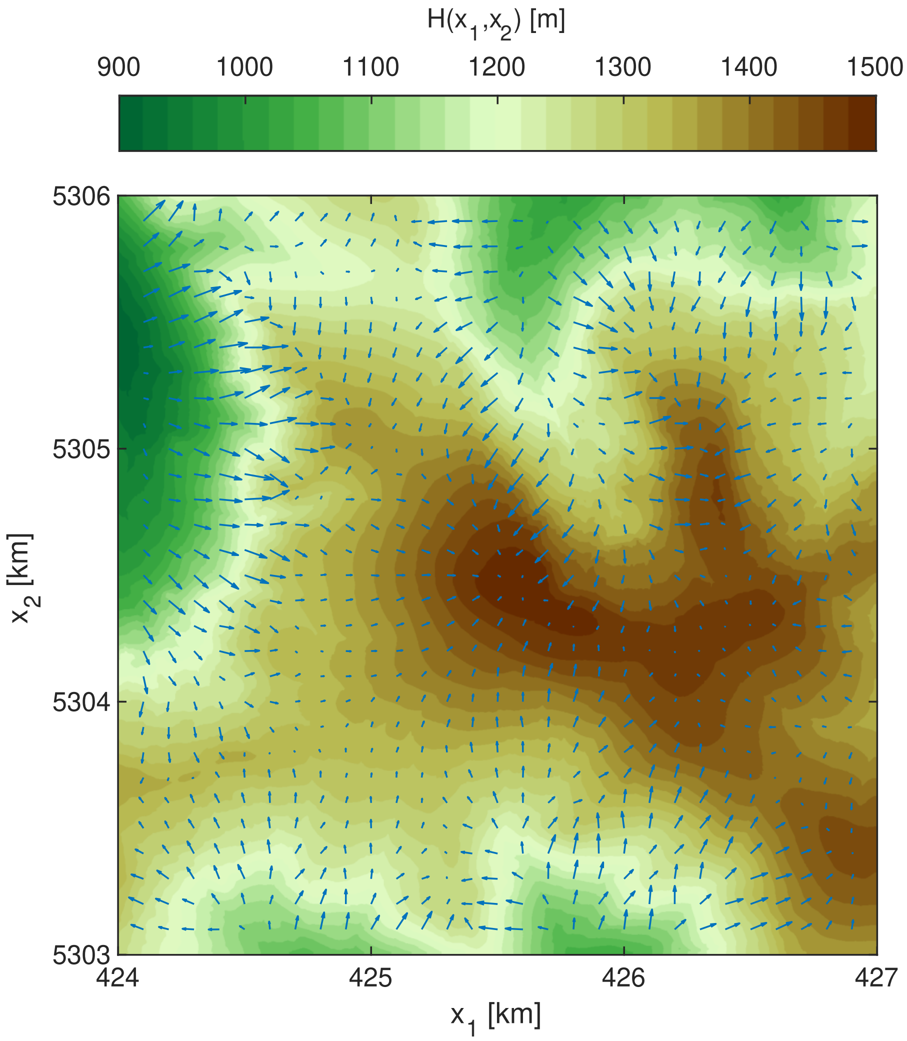

Abbildung 2: Topografie in der Umgebung des Feldberggipfels mit dem Gradienten der Höhe durch Pfeile dargestellt. Die Pfeile sind so skaliert, dass sie nicht zu stark überlappen.

(Aufgabe 4) sodass Gl. 10 erfüllt ist.

Mit Hilfe der Kettenregel lässt sich dies direkt auf das Gravitationspotential einer Punktmasse m am Ort $\vec{\xi}$ verallgemeinern:

$$U(\vec{x}) \;=\; -\frac{Gm}{|\vec{x}-\vec{\xi}|}, \qquad (13)$$

Mit Hilfe der Summenregel ergibt sich daraus für n Punktmassen m_1, ...,

m_n an den Orten $\vec{\xi}_1, \ldots, \vec{\xi}_1$

$$U(\vec{x}) \;=\; -\,G\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{|\vec{x}-\vec{\xi}_i|} \tag{14}$$

und für eine kontinuierliche Massenverteilung mit einer Dichte $\rho(\vec{\xi})$

$$U(\vec{x}) \;=\; -\,G\int\frac{\rho(\vec{\xi})}{|\vec{x}-\vec{\xi}|}\,d^3\xi. \tag{15}$$

Diese Ausdrücke sind denen für das Gravitationsfeld (Gln. 5 und 6) sehr ähnlich, aber einfacher, da keine Vektoraddition benötigt wird.

Da der Gradient einer konstanten Funktion null ist, könnte man zu allen Ausdrücken für das Potential eine beliebige Konstante addieren. Für das Gravitationspotential verwendet man aber meist 0 hierfür. Dies bedeutet, dass das Nullniveau des Gravitationspotentials dort liegt, wo man unendlich weit von den Massen entfernt ist.

Die in Abschnitt 3 besprochenen grundsätzlichen Eigenschaften des Gradienten gelten natürlich auch hier. Der einzige Unterschied zur dort als Beispiel betrachteten Topografie ist, dass die Menge der Punkte mit konstantem Potential in $\mathbb{R}^3$ nicht Linien (wie in $\mathbb{R}^2$) sind, sondern Flächen. Diese werden als Äquipotentialflächen bezeichnet. Solche werden wir später im Zusammenhang mit dem Geoid genauer betrachten. Das Gravitationsfeld $\vec{g}$ steht senkrecht auf den Äquipotentialflächen. Durch das Minuszeichen in Gl. 10 zeigt $\vec{g}$ aber nicht in die Richtung, in der U am steilsten ansteigt, sondern in die Richtung, in der U am stärksten abfällt.

Das Gravitationspotential hängt eng mit den Begriffen Arbeit und Energie zusammen. Angenommen, wir bewegen einer Masse m in einem Gravitationsfeld auf einem Weg $\vec{s}(t)$ vom Ort $\vec{s}_1 = \vec{s}(t_1)$ an einen anderen Ort $\vec{s}_2 = \vec{s}(t_2)$. Dabei müssen wir zu jeder Zeit eine Kraft

$$\vec{F}(t) \;=\; -\,m\,\vec{g}(\vec{s}(t)) = m\,\nabla U(\vec{s}(t)) \tag{16}$$

gegen das Gravitationsfeld aufbringen. Dies entspricht einer Leistung von

$$P(t) \;=\; \vec{F}(t)\cdot\frac{d}{dt}\vec{s}(t) \;=\; m\,\nabla U(\vec{s}(t))\cdot\frac{d}{dt}\vec{s}(t), \tag{17}$$

wobei $\frac{d}{dt}\vec{s}(t)$ die Geschwindigkeit ist. Nach der Kettenregel lässt sich dies als

$$P(t) \;=\; \vec{F}(t)\cdot\frac{d}{dt}\vec{s}(t) \;=\; m\,\frac{d}{dt}U(\vec{s}(t)) \tag{18}$$

schreiben. Damit ist die insgesamt aufzubringende Arbeit

$$W = \int_{t_1}^{t_2} P(t)\,dt = m\,(U(\vec{s}_2) - U(\vec{s}_1))\,, \tag{19}$$

also das Produkt aus der bewegten Masse mit der Differenz der Potentiale zwischen End- und Anfangspunkt des zurückgelegten Weges.

Das Produkt $mU(\vec{x})$ wird als potentielle Energie bezeichnet. Damit kann das Potential als potentielle Energie pro Masse betrachtet werden.

Für das Gravitationsfeld haben wir direkt gezeigt, dass es sich als Gradient einer Potentialfunktion darstellen lässt (Gln. 11, 14 und 15). Für beliebige Vektorfelder ist es jedoch nicht immer ganz einfach herauszufinden, ob sie sich durch eine Potentialfunktion darstellen lassen.

Felder, die sich durch eine Potentialfunktion darstellen lassen, werden als konservative Felder bezeichnet. Für konservative Felder gilt:

- Die auf einem Weg geleistete Arbeit hängt nur von Anfangs- und Endpunkt ab und ist unabhängig davon, welchen Weg wir wählen oder wie schnell wir ihn zurücklegen.
- Die Arbeit auf einer geschlossenen Kurve ist null.

5 Kugelsymmetrische Massenverteilungen

In Abschnitt 1 wurde bereits erwähnt, dass das Gravitationsgesetz in seiner einfachsten Form nur für punktförmige Massen gilt. Darüber hinaus gilt es auch für kugelsymmetrische Massenverteilungen, sofern wir uns außerhalb der Massenverteilung befinden. In diesem Fall ist die Gravitation an jeder Stelle genauso groß wie wenn die gesamte Masse im Zentrum der Kugel konzentriert wäre. Für eine kugelförmige Erde mit einem Radius von $r = 6371\,\mathrm{km}$ und $Gm_e = 3.986004415 \times 10^{14}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}^2}$ bedeutet dies, dass die Gravitationsbeschleunigung an der Erdoberfläche

$$g = \frac{Gm_e}{r^2} = 9.8203\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \tag{20}$$

ist, was ungefähr der realen Erde entspricht.

Das Gravitationsfeld innerhalb der Massenverteilung ist hingegen geringer. Das einfachste Beispiel ist eine gleichmäßige Verteilung des gesamten Masse

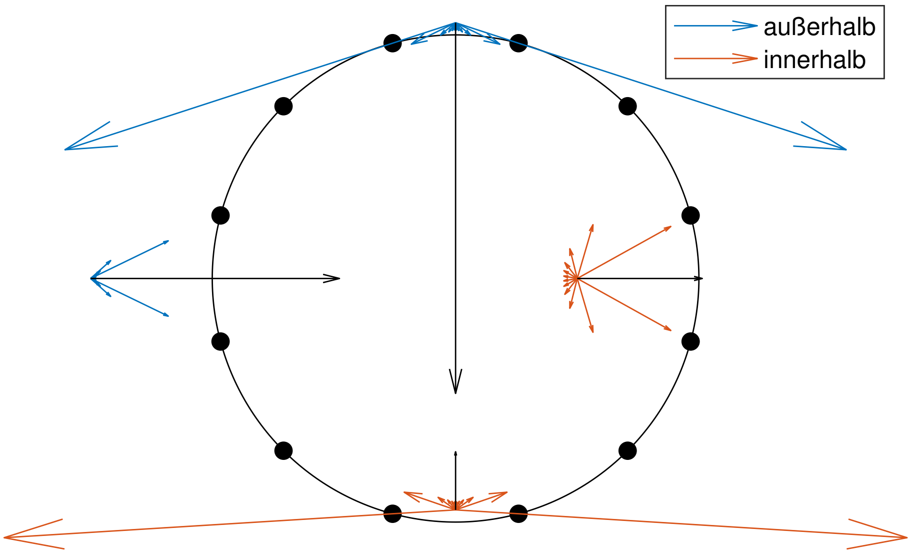

Abbildung 3: Gravitationsfeld von 12 Punktmassen, die auf einem Kreis angeordnet sind. Die farbigen Pfeile zeigen die Gravitationsfelder der einzelnen Massen, und die schwarzen Pfeile die jeweilige Summe.

auf eine dünne Kugelschale vom Radius r. In diesem Fall ist

$$\vec{g}(\vec{x}) = \begin{cases} -\frac{Gm}{|\vec{x}|^3}\vec{x} & \text{für} \quad |\vec{x}| > r \\ 0 & \phantom{\text{für}} \quad |\vec{x}| < r \end{cases} \tag{21}$$

Die bedeutet, dass sich die Gravitation der Massen im Inneren der Kugelschale komplett aufhebt.

Abbildung 3 zeigt dieses Ergebnis qualitativ in 2D für 12 Punktmassen, die auf einem Kreis angeordnet sind. Wäre es eine gleichmäßige Verteilung auf einer Kugel statt auf einem Kreis, müsste die Summe bei den inneren Punkten (rot) null sein. Hier sieht man, dass dies hier nicht zutrifft. Die Summe ist zwar kleiner als bei den äußeren Punkten (weil die einzelnen Felder unterschiedliche Richtungen haben), aber die einzelnen Felder kompensieren sich nicht komplett. Dies liegt hauptsächlich daran, dass es ein Kreis ist und keine Kugel. Für eine Kugel untersuchen wir die Gültigkeit von Gl. 21 an einem Beispiel in Aufgabe 6. Für einen allgemeinen Beweis von Gl. 21 bräuchten wir einiges an Theorie partieller Differentialgleichungen, worauf wir hier verzichten.

Aus von Gl. 21 lässt sich die allgemeine Formel des Gravitationsfeldes einer kugelsymmetrischen Massenverteilung ableiten, indem man sich die Massenverteilung aus vielen dünnen Kugelschalen zusammengesetzt vorstellt. Wenn wir uns dann am Punkt $\vec{x}$ befinden, addieren sich die Gravitationsfelder aller Kugelschalen mit Radien $r < |\vec{x}|$, während sich die der Kugelschalen mit $r > |\vec{x}|$ auslöschen. Damit ergibt sich, dass das Gravitationsfeld dem einer Punktmasse entspricht, wobei nur der Teil der Gesamtmasse beiträgt, der sich näher im Zentrum befindet als der Punkt, wo wir messen:

$$\vec{g}(\vec{x}) \;=\; -\frac{Gm(|\vec{x}|)}{|\vec{x}|^3}\vec{x} \tag{22}$$

Hierbei ist $m(|\vec{x}|)$ die Masse innerhalb einer Kugel vom Radius $|\vec{x}|$.