

Vorlesungsunterlagen

Messung und Interpretation des Schwerefelds

Stefan Hergarten
Institut für Geo- und Umweltnaturwissenschaften
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg



Geophysik
4. Juni 2020

1 Messung der Schwere

Die Messung der Schwerebeschleunigung ist vom Prinzip her kein großes Problem. Die einzige Herausforderung liegt in der erforderlichen Messgenauigkeit. So ist beispielsweise bei den in Aufgabe 10 betrachteten Schweredaten vom Nördlinger Ries die Variation knapp $20 \text{ mgal} = 2 \times 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Relativ zur absoluten Schwere ist dies etwa $2 \times 10^{-5} = 0.002 \%$. Oftmals sind regionale Variationen in der Schwere noch geringer.

Zu der hohen Anforderung an die Genauigkeit kommt hinzu, dass alle Gravimeter mechanische Komponenten enthalten. Diese sind heutzutage im Vergleich zu Elektronik recht teuer und wartungsintensiv. Dadurch gehören Gravimeter zu den teuersten und wartungsintensivsten geophysikalischen Messgeräten.

Es wird zwischen zwei Grundprinzipien der Schwermessung unterschieden – der Absolutmessung und der Relativmessung. Absolutmessungen beruhen auf der direkten Messung von Längen und Zeiten. Hier sind drei Messprinzipien weit verbreitet.

Schwingungsdauer eines Pendels. Beim mathematischen Pendel mit einer punktförmigen Masse hängt die Periode der Schwingung im Grenzfall kleiner Auslenkung nur von der Länge und von der Schwerebeschleunigung ab. Bei einem realen Pendel ist die effektive Länge allerdings nicht so leicht bestimmbar. Das im Physik-Praktikum behandelte Reversionspendel nach H. Kater (1777–1835) oder J. G. F. von Bohnenberger (1765–1831) umgeht dieses Problem. Bereits im 19. Jahrhundert wurde damit eine relative Genauigkeit von bis zu 10^{-6} erreicht, entsprechend $10 \frac{\mu\text{m}}{\text{s}^2} = 1 \text{ mgal}$. Allerdings müssen dafür sowohl der Abstand der Aufhängungspunkte als auch die Schwingungsperiode mit einer relativen Genauigkeit von 10^{-6} gemessen werden, was mit dem einfachen Aufbau im Praktikum nicht möglich ist.

Fallexperimente sind die naheliegendste Möglichkeit der Schwermessung. Da man die Startposition und die Anfangsgeschwindigkeit nicht mit ausreichender Genauigkeit bestimmen kann, benötigt man die Durchgangszeiten an mindestens drei ausreichend genau bekannten Positionen. Praktisch schießt man das Objekt nach oben und misst den Durchgang an zwei Positionen jeweils zweimal. Neben einer sehr genauen Zeitmessung wird ein Vakuum benötigt, um eine Verfälschung durch den Luftwiderstand zu vermeiden. Solche Messungen werden seit den 1950er Jahren mit relativen Genauigkeiten von bis zu 10^{-8} ,

entsprechend $0.1 \frac{\mu\text{m}}{\text{s}^2} = 10 \mu\text{gal}$, durchgeführt.

Bahndaten von Satelliten werden seit den 1960er Jahren für die Bestimmung des Schwerefelds benutzt. Hierfür werden Satelliten in einigen 100 km Höhe über der Erdoberfläche eingesetzt. Ab den 2000er Jahren wurden wesentliche Verbesserungen der Genauigkeit und der räumlichen Auflösung erreicht. Beim Kleinsatelliten CHAMP (CHALLENGING Minisatellite Payload, 2000–2010) erfolgte die Messung der Schwere noch ausschließlich aus der Messung der Bahnkurve. Beim Satellitenpaar GRACE (Gravity Recovery And Climate Experiment, 2002–2017) wurde zusätzlich die Position der beiden Satelliten, welche sich etwa 200 km voneinander entfernt etwa auf derselben Bahn befanden, ausgewertet. Der Satellit GOCE (Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer, 2009–2013) enthielt zusätzlich hochgenaue Beschleunigungssensoren. Mit Hilfe von Satelliten werden heute relative Genauigkeiten von bis zu 10^{-13} , entsprechend $10^{-12} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, erreicht. Die räumliche Auflösung liegt allerdings noch immer im Bereich von einigen 10er km und ist nicht mit den Möglichkeiten terrestrischen Messungen vergleichbar.

Relative Schweremessungen arbeiten nach dem Prinzip der Federwaage, wobei die erforderliche Genauigkeit hohe Ansprüche an die Konstruktion und an die Ausführung stellt. Grundsätzlich muss die Federkonstante ziemlich genau bekannt sein. Aus diesem Grund erfordern Relativ-Gravimeter eine regelmäßige Kalibrierung auf einer Messstrecke, wo die Schwere genau bekannt ist. Zusätzlicher technischer Aufwand entsteht durch die erforderliche Stabilisierung gegenüber Temperaturschwankungen.

Die am häufigsten eingesetzten Relativ-Gravimeter sind die des früheren Herstellers Askania, deren Produktion bereits vor dem 2. Weltkrieg begann, das Gravimeter nach S. Worden und das LaCoste-Romberg-Gravimeter. Es werden relative Genauigkeiten von bis zu 10^{-8} , entsprechend $0.1 \frac{\mu\text{m}}{\text{s}^2} = 10 \mu\text{gal}$, erreicht.

Vom Grundprinzip her ist die Herausforderung, dass sehr kleine Änderungen in der Schwere zu einer messbaren Verlängerung der Feder, also zu einem messbaren Ausschlag des Geräts, führen müssen. Abbildung 1 zeigt das Grundprinzip am Beispiel eines stark vereinfachten LaCoste-Romberg-Gravimeters. Typischerweise ist die Höhe c über eine Stellschraube einstellbar, und das Gravimeter wird so betrieben, dass $\alpha = 0$ ist. Das Gerät wird so geeicht, dass aus der Einstellung von c die Schwere abgelesen werden kann.

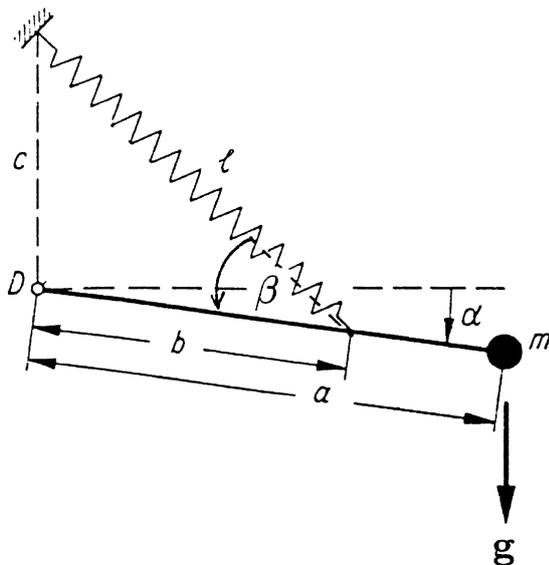


Abbildung 1: Vereinfachtes Prinzip des LaCoste-Romberg-Gravimeters.
 Quelle: TU Braunschweig, Institut für Geophysik und extraterrestrische Physik

Nehmen wir den Punkt D als Ursprung des Koordinatensystems und definieren die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a \cos \alpha \\ 0 \\ -a \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b \cos \alpha \\ 0 \\ -b \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}, \quad (1)$$

ist die aktuelle Länge der Feder

$$l = |\vec{c} - \vec{b}| = \sqrt{b^2 \cos^2 \alpha + (b \sin \alpha + c)^2} = \sqrt{b^2 + 2bc \sin \alpha + c^2}. \quad (2)$$

Ist l_0 die Länge der Feder im entspannten Zustand, so ist die aktuelle Kraft der Feder $F = k(l - l_0)$, wobei k die Federkonstante ist. Die Kraft zeigt in Richtung des Vektors $\vec{c} - \vec{b}$, sodass

$$\vec{F} = \frac{F}{l} (\vec{c} - \vec{b}) = k \left(1 - \frac{l_0}{l}\right) (\vec{c} - \vec{b}) \quad (3)$$

ist. Damit ist das Drehmoment durch die Feder und durch die Wirkung der Schwere insgesamt

$$\vec{M} = \vec{b} \times \vec{F} + \vec{a} \times (m\vec{g}) = \left(kbc \left(1 - \frac{l_0}{l}\right) - mga \right) \cos \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Die Bedingung für ein Gleichgewicht ist demnach

$$kbc \left(1 - \frac{l_0}{l}\right) = mga. \quad (5)$$

Nehmen wir nun an, dass l (durch Einstellung von c) den für das Gleichgewicht erforderlichen Wert hat. Damit kleine Änderungen in der Schwere erkennbar sind, sollte nun eine Änderung in g eine möglichst große Änderung in l und damit in α (nach Gl. 2) verursachen, d. h. die Ableitung $\frac{dl}{dg}$ sollte möglichst groß sein. Diese lässt sich durch Ableiten von Gl. 5 berechnen, woraus sich direkt

$$kbc \frac{l_0}{l^2} \frac{dl}{dg} = ma, \quad (6)$$

und damit

$$\frac{dl}{dg} = \frac{mal^2}{kbc l_0} = \frac{l}{g} \left(\frac{l}{l_0} - 1\right) \quad (7)$$

ergibt (letzteres unter Verwendung von Gl. 5). Das Entscheidende ist hierbei die Länge der ungespannten Feder l_0 im Nenner. Je kleiner diese ist, desto stärker wirken sich kleine Änderungen in g auf l und damit auf α aus. Dies bedeutet, dass das Gravimeter fast instabil ist, was als Astasierung bezeichnet wird. Hierdurch wird eine hohe Sensitivität der Geräts erreicht, ohne die die o. a. Genauigkeit nicht erreichbar wäre.

2 Korrekturen gemessener Schwerewerte

Strukturen im Untergrund verursachen geringe Variationen der Schwere, welche zumeist deutlich kleiner sind als die globale Variation und andere Einflüsse wie beispielsweise die Höhe, in der gemessen wird. Um aus Schweremessungen Rückschlüsse auf die Massenverteilung im Untergrund zu ziehen, müssen daher zuerst die Einflüsse, welche nichts mit der Massenverteilung zu tun haben, korrigiert werden. Dies sind im Wesentlichen

- Breitengrad,
- Höhe über dem Referenzellipsoid,
- „sichtbare“ Massen (Gebirge, ...) und
- Gezeiten.

Diese Korrekturen der gemessenen Schwerewerte werden oftmals als **Reduktionen** bezeichnet, obwohl die Werte nicht notwendigerweise kleiner werden. Der Begriff der reduzierten Werte dürfte aus der Meteorologie bekannt sein, wo Barometer normalerweise so justiert werden, dass sie nicht den aktuellen Luftdruck anzeigen, sondern den auf Meereshöhe umgerechneten Druck. Ebenso zeigen Karten des Luftdrucks nicht den aktuellen Druck auf der Höhe der Topografie, sondern den auf Meereshöhe umgerechneten Druck. Andernfalls sähe man in den Karten nur den Effekt der Topografie, da dieser wesentlich größer ist als andere Variationen im Luftdruck. Der dargestellte Wert wird als der auf Meereshöhe reduzierte Luftdruck bezeichnet, obwohl dieser höher ist als der aktuelle Luftdruck.

Die Abnahme der Schwere von den Polen zum Äquator durch die Ellipsoidform und die Zentrifugalbeschleunigung stellt die stärkste Variation der Schwere auf der Erde dar. Um diesen Einfluss zu korrigieren, wird die Normalschwere auf Basis der bereits in den Hausaufgaben behandelten Normal-schwereformel von den gemessenen Werten subtrahiert. Dieser Schritt der Auswertung wird als **Breitenkorrektur** bezeichnet.

Das Ergebnis der Breitenkorrektur ist allerdings die Differenz zwischen einer in irgendeiner Höhe gemessenen Schwere und einem Referenzwert, der sich auf die Höhe des Ellipsoids bezieht. Anhand der Formel

$$g(r) = \frac{Gm_e}{r^2} \quad (8)$$

für die Gravitation außerhalb einer radialsymmetrischen Massenverteilung können wir uns leicht klarmachen, dass die Höhe einen deutlichen Einfluss auf die Schwere hat. Ableiten von Gl. 8 liefert

$$\frac{d}{dr}g(r) = -2\frac{Gm_e}{r^3} = -\frac{2}{r}g(r). \quad (9)$$

An der Erdoberfläche entspricht dies einer Änderung der Schwere mit der Höhe von

$$\frac{d}{dr}g(r) = -3.0828 \times 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = -0.30828 \frac{\text{mgal}}{\text{m}}. \quad (10)$$

Dies gilt allerdings nur für eine kugelförmige, nicht rotierende Erde. Die gebräuchliche Näherung für die Schwere bei der geographischen Breite ϕ_{geog} in der Höhe h über dem Referenzellipsoid $g(\phi_{\text{geog}}, h)$ auf Basis der Werte des GRS80 lautet:

$$g(\phi_{\text{geog}}, h) = g_0(\phi_{\text{geog}}) (1 - (k_1 - k_2 \sin^2 \phi_{\text{geog}}) h + k_3 h^2) \quad (11)$$

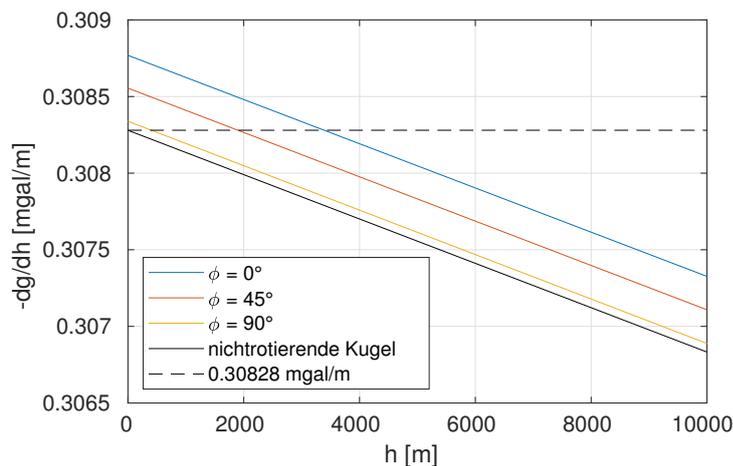


Abbildung 2: Abnahme der Schwere mit der Höhe für verschiedene geographische Breiten und für eine nichtrotierende Kugel

mit

$$\begin{aligned}
 h &= \text{Höhe über dem Referenzellipsoid} \\
 g_0 &= \text{Normalschwere auf dem Referenzellipsoid} \\
 k_1 &= 3.15704 \times 10^{-7} \text{ m}^{-1} \\
 k_2 &= 2.10269 \times 10^{-9} \text{ m}^{-1} \\
 k_3 &= 7.37452 \times 10^{-14} \text{ m}^{-2}
 \end{aligned}$$

Dies entspricht einer Schwereänderung pro Höhe von

$$\frac{\partial}{\partial h} g(\phi_{\text{geog}}, h) = g_0(\phi_{\text{geog}}) ((k_1 - k_2 \sin^2 \phi_{\text{geog}}) + 2k_3 h). \quad (12)$$

Wie in Abbildung 2 dargestellt, unterschätzt die einfache Näherung (Gl. 9) die Abnahme der Schwere mit der Höhe je nach Breitengrad um bis zu 0.5 mgal pro 1000 m. Ein Fehler von 2 m bei der Höhenmessung hätte einen ähnlichen Effekt. Entsprechend verursacht die Verwendung der einfachen Näherung (Gl. 9) bei terrestrischen Messungen keine großen Fehler, obwohl der Unterschied größer als die Messgenauigkeit der meisten Gravimeter ist. Die Annahme einer konstanten Abnahme gemäß Gl. 10 (horizontale Linie) ist in den meisten Fällen sogar günstiger als die einfache Näherung. Da Gl. 11 allerdings nicht sehr kompliziert ist, spricht nichts dagegen, diese direkt anzuwenden.

Schwerewerte, welche in einer Höhe h über dem Referenzellipsoid gemessen

wurden, werden auf das Referenzellipsoid umgerechnet, indem der Wert

$$g_0(\phi_{\text{geog}}) - g(\phi_{\text{geog}}, h) = g(\phi_{\text{geog}}, h) \left((k_1 - k_2 \sin^2 \phi_{\text{geog}}) h - k_3 h^2 \right) \quad (13)$$

nach Gl. 11 (ggfs. einfacher 0.30828 mgal pro m Höhe) zum gemessenen Wert addiert werden. Es ist darauf zu achten, dass die Höhe gegenüber dem Referenzellipsoid und nicht gegenüber dem Geoid gemessen wird. Diese Korrektur wird als **Höhenkorrektur** oder als **Freiluftkorrektur** bezeichnet. Der nach der Breitenkorrektur und der Freiluftkorrektur verbleibende Schwerewert wird als **Freiluftanomalie** bezeichnet.

Die Korrektur der Gravitation der Masse unter der Topografie ist hingegen komplizierter, selbst wenn eine konstante Dichte angenommen wird. Im einfachsten Fall könnten wir annehmen, dass die Topografie eine konstante Höhe h gegenüber der Erdoberfläche hat. Wenn wir von einer dünnen Kugelschale um die gesamte Erde herum ausgehen, ergibt sich ein Volumen von etwa $4\pi r_e^2 h$ (Erdoberfläche mal Höhe) und damit eine zusätzliche Masse von

$$m = \rho 4\pi r_e^2 h. \quad (14)$$

Diese Masse erzeugt eine zusätzliche Gravitationsbeschleunigung von

$$\delta g = \frac{Gm}{r^2} = 4\pi G\rho h \quad (15)$$

an der Erdoberfläche ($r = r_e$). Für eine mittlere Dichte der Oberkruste von $\rho = 2670 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ist der Faktor vor der Höhe

$$4\pi G\rho = 2.24 \times 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0.224 \frac{\text{mgal}}{\text{m}}. \quad (16)$$

Somit beträgt der positive Effekt der zusätzlichen Masse nur etwa $\frac{2}{3}$ des negativen Effekts der Höhe (Gl. 10), selbst wenn wir von einer Kugelschale um die gesamte Erde herum ausgehen. Die zusätzliche Masse eines Gebirges kompensiert den negativen Effekt der zusätzlichen Höhe also nicht. Dies hängt mit der geringen Dichte der Kruste zusammen. Diese beträgt nur die Hälfte der mittleren Dichte der Erde ($\rho \approx 5500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$), sodass eine Erhöhung des Volumens der Kruste nicht genügend Masse liefert. Entsprechendes gilt für die Schwere in der Kruste. Diese steigt zunächst mit der Tiefe an.

Die Vorstellung einer Kugelschale um die gesamte Erde herum ist für die Berechnung der Schwere im Erdinneren sinnvoll, aber nicht für den Einfluss der Topografie. Eine solche Kugelschale würde einer größeren Erde entsprechen, hätte aber keine Topografie. Stattdessen wird im einfachsten Fall die Gravitation einer unendlich ausgedehnten Platte betrachtet, welche tangential an die Erdoberfläche angesetzt ist. Man kann sich leicht vorstellen, dass

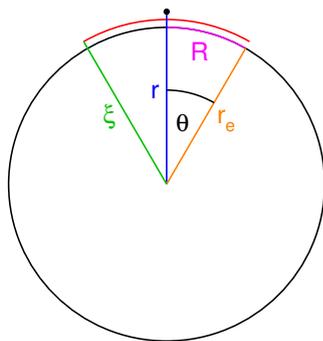


Abbildung 3: Variablen für die Berechnung der Gravitation einer dünnen Kugelkappe

die Gravitation einer solchen Platte geringer ist als die einer Kugelschale, da die Gravitation weit entfernter Bereiche nahezu horizontal ist und sich in der Summe aufhebt. Die Gravitation einer solchen Platte lässt sich ebenfalls analytisch berechnen. Sie ist halb so groß wie die einer Kugelschale, beträgt also

$$\delta g_B = 2\pi G \rho h \quad (17)$$

mit

$$2\pi G \rho = 1.12 \times 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0.112 \frac{\text{mgal}}{\text{m}}. \quad (18)$$

Diese Näherung wurde nach P. Bouguer (1698–1758) benannt. Nach der Bouguer-Näherung beträgt der positive Effekt der zusätzlichen Masse nur etwa $\frac{1}{3}$ des negativen Effekts der Höhe (Gl. 10).

Die Anwendung der Bouguer-Näherung mit der aktuellen Höhe des jeweiligen Punkts über dem Referenzellipsoid wird als **Bouguer-Korrektur** bezeichnet. Dies bedeutet dass der Wert δ_B für jeden Punkt nach Gl. 17 von der Freiluftanomalie subtrahiert wird. Die nach der Breitenkorrektur, der Freiluftkorrektur und der Bouguer-Korrektur verbleibende Schwereanomalie wird als **Bouguer-Anomalie** bezeichnet.

Im Idealfall spiegelt die Bouguer-Anomalie die Verteilung der Dichte im Untergrund wider. Gegenüber der Breiten- und Freiluftkorrektur ist die Bouguer-Korrektur aber eine grobe Annahme und bringt eine recht große Unsicherheit. Um diese einzuschätzen, betrachten wir eine dünne Kugelkappe wie in Abb. 3 als rotes Kreissegment dargestellt.

Im Grenzfall einer unendlichen dünnen Kugelkappe lässt sich die Gravitation

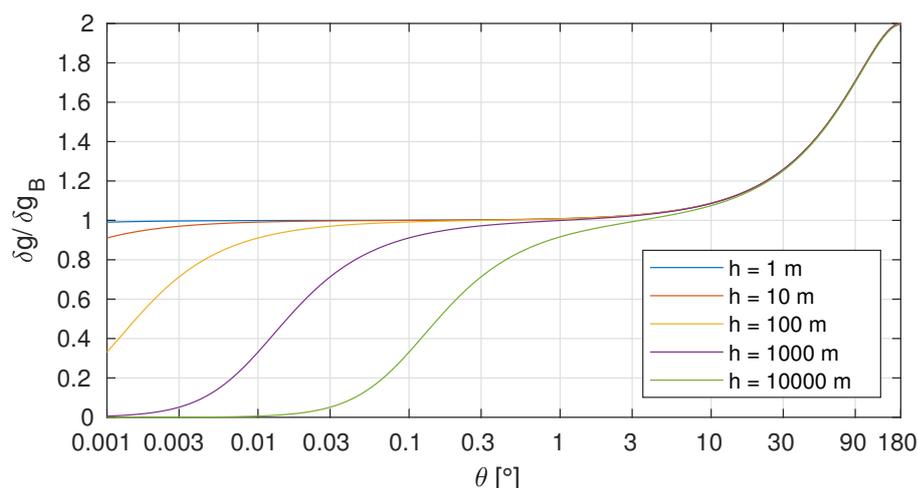


Abbildung 4: Gravitation einer dünnen Kugelkappe im Verhältnis zur Bouguer-Näherung

über deren Zentrum analytisch berechnen. Man erhält

$$\delta g = \delta g_B u^2 \frac{u - \cos \vartheta}{\sqrt{1 - 2u \cos \vartheta + u^2}} \Big|_{\vartheta=0}^{\theta} \quad (19)$$

mit $u = \frac{\xi}{r}$. Der Balken rechts bedeutet, dass der Term für $\vartheta = \theta$ (Öffnungswinkel, siehe Abb. 3) und $\vartheta = 0$ auszuwerten ist und die Differenz zu bilden ist (wie oftmals im Zusammenhang mit Integralen verwendet). Abbildung 4 zeigt das Ergebnis von Gl. 19, wobei der Faktor hinter δg_B darstellt ist. Ein Wert von 1 bedeutet demnach, dass die Gravitation der Kugelkappe durch die Bouguer-Näherung korrekt beschrieben wird. Werte unter 1 zeigen, dass die Gravitation der Kugelkappe geringer ist als die Bouguer-Näherung, so dass die Anwendung der Bouguer-Korrektur den Effekt der zusätzlichen Masse überschätzt. Werte über 1 zeigen entsprechend, dass der Effekt der zusätzlichen Masse durch die Bouguer-Formel unterschätzt wird.

Ob sich die Kugelkappe direkt an der Erdoberfläche befindet ($\xi = r_e$) oder leicht darüber, hat keinen großen Einfluss auf das Ergebnis. Hingegen hat unsere Höhe gegenüber der Kugelkappe, $h = r - \xi$, einen wesentlichen Einfluss. Für große Öffnungswinkel θ steigt die Gravitation an und erreicht wie erwartet das doppelte der Bouguer-Näherung für $\theta = 180^\circ$, d. h. für eine ganze Kugelschale. Dieser Bereich ist für die Berücksichtigung der Topografie der Erde allerdings nicht relevant.

Für moderate Öffnungswinkel θ nähert sich die Gravitation an die Bouguer-Näherung an, wenn wir uns dicht über der Kugelkappe befinden. So ist

beispielsweise die Bouguer-Näherung ziemlich gut für $h \leq 10$ m und $0.01^\circ \leq \theta \leq 1^\circ$. Wenn wir uns die Kugelkappe als Scheibe vorstellen, hätte diese einen Radius von $R = r_e \theta$ (θ im Bogenmaß). Dies wäre dann ein Bereich zwischen etwa 1 km und 100 km Radius. Hieraus kann man ableiten, dass die Bouguer-Näherung tatsächlich recht gut ist für Massen, die sich dicht unter uns befinden. Für tiefer liegende Massen überschätzt die Bouguer-Näherung die Gravitation. So wäre beispielsweise bei $\theta = 0.01^\circ$ bei Massen, die sich $h = 100$ m unter uns befinden, die Abweichung schon etwa 10 %. Dasselbe gilt für $\theta = 0.1^\circ$ bei $h = 1000$ m. Daraus folgt, dass wir bei $\frac{h}{R} = 0.1$ schon etwa 10 % Fehler bei der Bouguer-Näherung haben. Dies wäre beispielsweise der Fall, wenn wir uns auf einem Gipfel befinden und das Gefälle in alle Richtungen 10 % ist. Befinden wir uns nicht auf einem Gipfel, ist der Fehler der Bouguer-Näherung üblicherweise geringer. Daher liefert die Bouguer-Näherung bei nicht zu steiler Topografie meist brauchbare Ergebnisse, wobei eine präzise Auswertung trotzdem eine genauere Einbeziehung der realen Topografie erfordert.

3 Isostasie und Schwere

Aus Schwereanomalien über Gebirgen kann erkannt werden, inwieweit das Gebirge isostatisch ausgeglichen ist. Im letzten Abschnitt haben wir bereits gelernt, dass der Effekt der zusätzlichen Masse immer geringer ist als der Effekt der Höhe, d. h. der Bouguer-Effekt ist immer geringer als der Freilufteffekt. Hieraus folgt, dass die Schwere auf der Oberfläche eines Gebirges immer geringer ist als im Flachland.

Nach Anwendung der Freiluftkorrektur ist das nicht mehr unbedingt so. Wenn das Gebirge nicht ausgeglichen ist, erzeugt die zusätzliche Masse des Gebirges eine höhere Schwere (Abb. 5, links). Eine zusätzliche Anwendung der Bouguer-Korrektur kompensiert diesen Effekt. Somit ist bei einem nicht ausgeglichenen Gebirge die Freiluftanomalie positiv und die Bouguer-Anomalie im Idealfall null.

Ein vollständiger isostatischer Ausgleich (Abb. 5, rechts) sorgt hingegen dafür, dass sich unter jedem Punkt gleich viel Masse befindet. Hierbei ist es egal, wie die vertikale Verteilung der Masse ist, also ob das Airy-Modell (wie in Abb. 5) oder das Pratt-Modell verwendet wird. Im Idealfall ist dann die Freiluftanomalie gleich null. Eine zusätzliche Anwendung der Bouguer-Korrektur entfernt dann den Effekt einer zusätzlichen Masse, die überhaupt nicht vorhanden ist. Dadurch wird die Bouguer-Anomalie negativ.

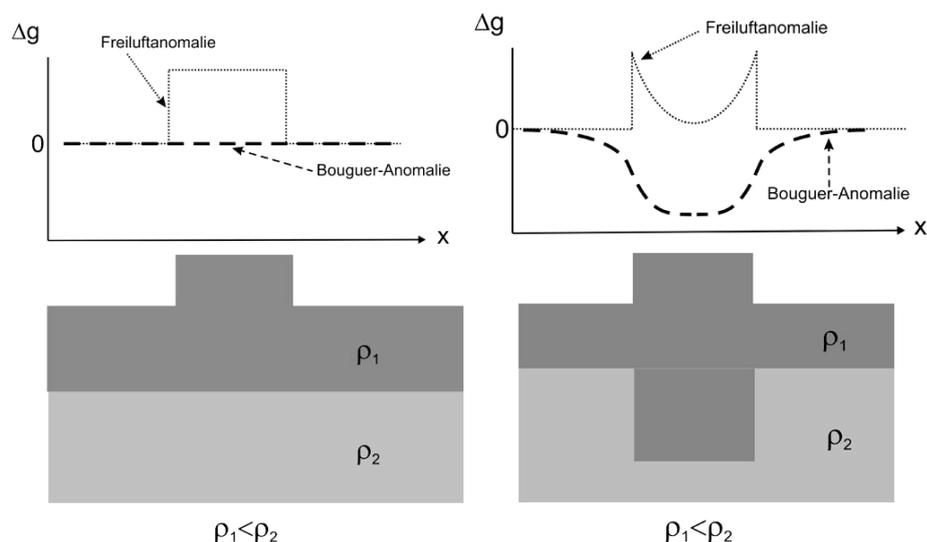


Abbildung 5: Schwereanomalien bei einem nicht isostatisch ausgeglichenen Gebirge (links) und bei komplettem isostatischem Ausgleich (rechts). Quelle: Clauser, Einführung in die Geophysik

Die hier angestellten Überlegungen beruhen auf der Gültigkeit der einfachen Bouguer-Näherung und gelten somit nur bei moderater Topografie. Insbesondere an steilen Gebirgsrändern sind deutliche Abweichungen zu erwarten. Grundsätzlich ist aber die Freiluftanomalie bei Gebirgen eher positiv und wird mit stärkerem isostatischem Ausgleich geringer, während die Bouguer-Anomalie eher negativ ist.

4 Die Schwereanomalie eines kugelförmigen Massenüberschusses oder -defizits

Wir wissen bereits, dass das Gravitationsfeld einer kugelförmigen Masse mit dem einer Punktmasse übereinstimmt, und dass sich das Gravitationsfeld einer beliebigen Massenverteilung dem einer Punktmasse annähert, wenn wir genügend weit entfernt sind. Somit ist eine Kugel im Untergrund mit höherer oder geringerer Dichte als das umgebende Gestein, äquivalent zu einer Punktmasse mit einem Massenüberschuss oder -defizit δm , die einfachste Modellvorstellung einer Schwereanomalie (Abb. 6).

Ist r der Radius der Kugel und $\delta\rho$ der Dichteunterschied zur Umgebung (kann negativ sein, z. B. bei einer Höhle), ist der Massenüberschuss bzw.

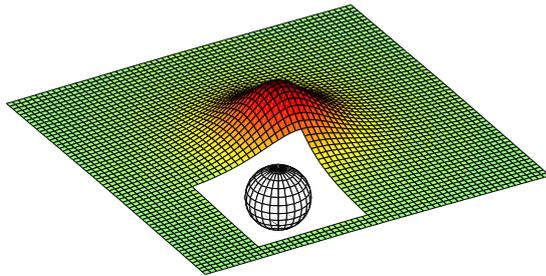


Abbildung 6: Kugel im Untergrund als einfachste Vorstellung einer Schwereanomalie. Die Fläche stellt die Schwere an der Oberfläche dar.

das Massendefizit

$$\delta m = \frac{4\pi}{3} r^3 \delta \rho. \quad (20)$$

Ist \vec{a} der Mittelpunkt der Kugel, so ist die zusätzliche Gravitation am Ort \vec{x}

$$\delta \vec{g}(\vec{x}) = - \frac{G \delta m}{|\vec{x} - \vec{a}|^3} (\vec{x} - \vec{a}). \quad (21)$$

Aus den Hausaufgaben wissen wir aber schon, dass bei einer kleinen zusätzlichen Schwere nicht deren Betrag in der Messung sichtbar ist, sondern nur deren Komponente in Richtung der gesamten Schwere. Nehmen wir an, dass die x_3 -Richtung vertikal ist, ist dies die Komponente entgegen der x_3 -Richtung, also

$$\delta g(\vec{x}) = \delta \vec{g}(\vec{x}) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{G \delta m}{|\vec{x} - \vec{a}|^3} (x_3 - a_3). \quad (22)$$

Wenn die Erdoberfläche bei $x_3 = 0$ liegt und die Kugel in einer Tiefe d , also $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix}$, ergibt sich

$$\delta g(x_1, x_2, 0) = - \frac{G \delta m a_3}{\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + d^2}^3} = \frac{G \delta m d}{\sqrt{\xi^2 + d^2}^3}. \quad (23)$$

Hierbei ist

$$\xi = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} \quad (24)$$

der horizontale Abstand des Messpunkts vom Zentrum der Kugel. Abbildung 7 zeigt das normierte Profil durch die Schwereanomalie, welches für kegelförmige Massen immer gleich aussieht.

Der maximale Wert tritt vertikal über dem Zentrum auf ($\xi = 0$) und beträgt

$$\delta g_{\max} = \frac{G \delta m}{d^2}. \quad (25)$$

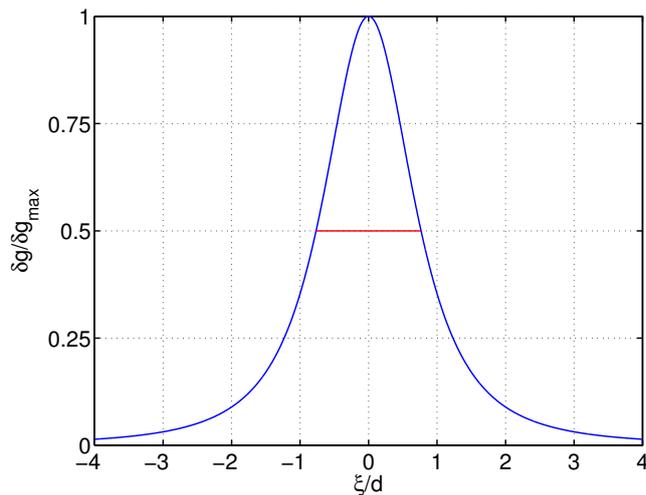


Abbildung 7: Profil durch die Schwereanomalie eines kugelförmigen Massenüberschusses im Untergrund. Die Achsen sind auf die Tiefe d und auf die maximale Anomalie δg_{\max} normiert. Die rote Linie stellt die Halbwertsbreite (FWHM) dar.

Die Breite der Kurve wird üblicherweise durch die Halbwertsbreite charakterisiert. An der Stelle, wo die Schwereanomalie auf die Hälfte des maximalen Werts abgefallen ist, gilt

$$\delta g = \frac{G\delta m d}{\sqrt{\xi^2 + d^2}^3} = \frac{1}{2}\delta g_{\max} = \frac{1}{2} \frac{G\delta m}{d^2}. \quad (26)$$

Hieraus folgt

$$\sqrt{\xi^2 + d^2}^3 = 2d^3, \quad (27)$$

und damit

$$\xi = \sqrt{2^{\frac{2}{3}} - 1} d. \quad (28)$$

Die volle Halbwertsbreite (FWHM = Full Width at Half Maximum), welche in Abb. 7 durch eine rote Linie markiert ist, ergibt sich daraus als

$$w = 2\xi = 2\sqrt{2^{\frac{2}{3}} - 1} d \approx \frac{3}{2} d. \quad (29)$$

Damit kann ein Profil einer Schwereanomalie recht einfach ausgewertet werden. Im ersten Schritt wird die Halbwertsbreite gemessen und nach Gl. 29 dann die Tiefe als

$$d \approx \frac{2}{3} w \quad (30)$$

geschätzt. Im zweiten Schritt wird dann die maximale Schwereanomalie δg_{\max} abgelesen und mit Hilfe von Gl. 25 der Massenüberschuss bzw. das Massendefizit

$$\delta m = \frac{d^2 \delta g_{\max}}{G} \quad (31)$$

geschätzt.

Grundsätzlich lässt sich natürlich auch der Einfluss eines punkt- bzw. kugelförmigen Massenüberschusses bzw. -defizits auf die Höhe des Geoids berechnen. Die Berechnung ist sogar einfacher als bei der Schwereanomalie selbst, da keine Richtungen von Vektoren zu berücksichtigen sind. Die Änderung des Potentials ist

$$\delta U(\vec{x}) = - \frac{G \delta m}{|\vec{x} - \vec{a}|}, \quad (32)$$

was an der Erdoberfläche

$$\delta U(x_1, x_2, 0) = - \frac{G \delta m}{\sqrt{\xi^2 + d^2}} \quad (33)$$

ergibt. Hieraus resultiert eine Anhebung des Geoids (bzw. eine Absenkung für $\delta m < 0$) um

$$\delta h = - \frac{\delta U}{g} = \frac{G \delta m}{g \sqrt{\xi^2 + d^2}} = \frac{\delta g}{g} \frac{\xi^2 + d^2}{d}. \quad (34)$$

Über dem Zentrum ist dann

$$\delta h_{\max} = \frac{\delta g_{\max}}{g} d. \quad (35)$$

Dies bedeutet, dass bei gleicher maximaler Schwereanomalie tiefer liegende Massen eine größere Anhebung des Geoids bewirken. Demnach spiegelt die Schwereanomalie selbst eher die seichtere Struktur des Erdinneren wider, Variationen in der Geoidhöhe hingegen eher die tiefere Struktur.

5 Uneindeutigkeit von Schweremessungen

Wenn wir davon ausgehen, dass eine Schwereanomalie aus einem punkt- oder kugelförmigen Massenüberschuss oder -defizit resultiert, können wir die Tiefe d und den Massenüberschuss δm aus einem Schwereprofil ermitteln. Wie im letzten Abschnitt diskutiert, verrät die Breite der Kurve recht

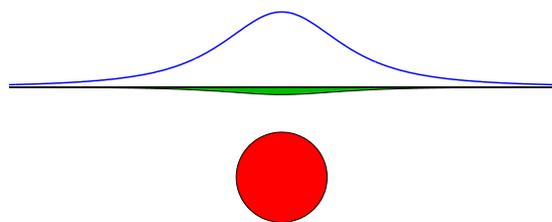


Abbildung 8: Kugelförmiger Massenüberschuss (rot) und oberflächennahe Schicht (grün), welche an der Oberfläche dieselbe Schwereanomalie (blaue Linie) erzeugen

direkt die Tiefe. In diesem Fall wäre nur der Radius unbestimmt. Kugeln verschiedener Radien erzeugen dieselbe Schwereanomalie, sofern die Dichtedifferenz zum Nebengestein so ist, dass der gesamte Massenüberschuss δm gleich ist.

In der Realität können wir allerdings nicht von einer Kugelform ausgehen. Sobald die Form variiert, wird die Interpretation der Schwereanomalie uneindeutig, selbst wenn Daten für eine Fläche vorliegen. Grundsätzlich können tief liegende, kugelförmige Strukturen dieselbe Schwereanomalie erzeugen wie seichtere, horizontal weiter ausgedehnte Strukturen. Im Extremfall lässt sich jede beliebige Schwereanomalie auch durch eine geeignete oberflächennahe Struktur erklären. Deren Mächtigkeit lässt sich direkt aus der Bouguer-Formel (Gl. 17) berechnen,

$$\delta g_B = 2\pi G \delta \rho h, \quad (36)$$

wobei $\delta \rho$ die Dichtedifferenz zum umgebenden Gestein ist und h die Mächtigkeit. Abbildung 8 illustriert diese Äquivalenz. Nach unseren Überlegungen zur Bouguer-Korrektur stimmt dies streng genommen nur im Grenzfall $h \rightarrow 0$ und $\delta m \rightarrow \infty$, wobei das Produkt $\delta \rho h$ konstant ist. Bei endlichen Mächtigkeiten stimmt das räumliche Muster von h nicht genau mit dem von δg überein, was aber nicht schlimm ist.

Der gesamte Massenüberschuss bzw. das gesamte Massendefizit lassen sich hingegen eindeutig aus der Schwereanomalie bestimmen. Beginnen wir mit einer Punktmasse nach Gl. 23. Das Integral der Schwereanomalie über die gesamte Fläche ist dann

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta g(x_1, x_2, 0) dx_1 dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G \delta m d}{\sqrt{\xi^2 + d^2}^3} dx_1 dx_2 \quad (37)$$

mit $\xi = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2}$. Transformieren wir das Integral auf ebene Polarkoordinaten (mit dem Radius ξ), ergibt sich

$$I = 2\pi \int_0^\infty \frac{G\delta m d}{\sqrt{\xi^2 + d^2}^3} \xi d\xi, \quad (38)$$

und nach Substitution von $u = \xi^2 + d^2$

$$I = 2\pi G\delta m d \int_{d^2}^\infty u^{-\frac{3}{2}} \frac{1}{2} du = -2\pi G\delta m d u^{-\frac{1}{2}} \Big|_{d^2}^\infty = 2\pi G\delta m. \quad (39)$$

Das Prinzip der Überlagerung mehrerer Massen gilt natürlich auch hier. Dementsprechend gilt Gl. 39 auch, wenn mehrere Punktmassen an verschiedenen Stellen in Untergrund angeordnet sind. In diesem Fall ist δm natürlich der gesamte Massenüberschuss. Entsprechendes gilt auch für eine kontinuierliche Massenverteilung. Das Integral über die Schwereanomalie ist immer durch den gesamten Massenüberschuss δm definiert, egal wie die Massen räumlich verteilt sind. Für das in Abb. 8 dargestellte Beispiel bedeutet dies, dass beide Massenverteilungen denselben totalen Massenüberschuss gegenüber dem umgebenden Gestein haben müssen, obwohl dies in der Abbildung durch die ebene Darstellung nicht so aussieht.

Allerdings beruht dieses Ergebnis darauf, dass eine ebene Oberfläche ohne Berücksichtigung der Erdkrümmung angenommen wurde. Wenn wir stattdessen die Schwereanomalie über eine ganze Kugeloberfläche integrieren, erhalten wir den doppelten Werte wie in Gl. 39, also einen Faktor 4π statt 2π .